수학 영역

● [A형]

1. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 〔2점〕 **정답** ③

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\div(\sqrt{2})^6=(-8)\times\frac{1}{8}=-1$

2. 계산 능력 – 행렬과 그래프 〔2점〕 **정답** ③

$A-B=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\end{pmatrix}$

$A^2-AB=A(A-B)$

$=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 A^2-AB의 모든 성분의 합은 $1+1+(-3)+1=0$이다.

3. 계산 능력 – 함수의 극한과 연속 〔2점〕 **정답** ②

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}$$

4. 계산 능력 – 다항함수의 미분법 〔3점〕 **정답** ④

$f(x)=(x^2-1)(2x+1)$에서

$f'(x)=2x(2x+1)+2(x^2-1)=6x^2+2x-2$

$\therefore f'(1)=6+2-2=6$

5. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 〔3점〕 **정답** ③

$(\log_4 x)^2-\log_4 x-2=0$에서

$(\log_4 x+1)(\log_4 x-2)=0$

$\log_4 x=-1$ 또는 $\log_4 x=2$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=16$

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{4}\times16=4$

6. 수학 외적 문제 해결 능력 – 확률 〔3점〕 **정답** ①

10명의 태권도 동아리 회원 중에서 태권도 공연에 참가할 4명의 회원을 임의로 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

A, B, C가 모두 태권도 공연에 참가해야 하므로 A, B, C를 제외한 7명의 태권도 동아리 회원 중에서 1명의 회원을 임의로 뽑는 경우의 수는

${}_7C_1=7$

따라서, 구하는 확률은 $\frac{7}{210}=\frac{1}{30}$이다.

7. 수학 외적 문제 해결 능력 – 통계 〔3점〕 **정답** ①

K 고등학교 남학생의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(63, 4^2)$을 따른다.

$\therefore P(59\le X\le65)=P\left(\frac{59-63}{4}\le Z\le\frac{65-63}{4}\right)$

$=P(-1\le Z\le0.5)$

$=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le0.5)$

$=0.3413+0.1915=0.5328$

8. 이해력 – 다항함수의 미분법 〔3점〕 **정답** ②

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	2	⋯	4
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	a	↘	$a-4$	↗	$a+16$

닫힌 구간 [0, 4]에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 $a-4$를 갖고, $x=4$일 때 최댓값 $a+16$을 갖는다.

이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 -10이므로

$a-4=-10$

$\therefore a=-6$

따라서, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $-6+16=10$이다.

9. 이해력 – 지수함수와 로그함수 〔3점〕 **정답** ③

$f(mn)=0$을 만족시키려면 $mn=10^t$ (t는 음이 아닌 정수)의 꼴이어야 한다.

m, n은 100보다 작은 자연수이므로

$mn=1$ 또는 $mn=10$ 또는 $mn=100$ 또는 $mn=1000$이어야 한다.

$mn=1$일 때,

순서쌍 (m, n)은 $(1, 1)$로 1개이다.

$mn=10$일 때,

순서쌍 (m, n)은 $(1, 10)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(10, 1)$로 4개이다.

$mn=100$일 때,

순서쌍 (m, n)은 $(2, 50)$, $(4, 25)$, $(5, 20)$, $(10, 10)$, $(20, 5)$, $(25, 4)$, $(50, 2)$로 7개이다.

$mn=1000$일 때,

순서쌍 (m, n)은 $(20, 50)$, $(25, 40)$, $(40, 25)$, $(50, 20)$으로 4개이다.

따라서, 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $1+4+7+4=16$이다.

10. 이해력 – 함수의 극한과 연속 〔3점〕 **정답** ④

ㄱ. (참) $\lim_{x\to-1-0}g(x)=-1$, $\lim_{x\to-1+0}g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1}g(x)=-1$

ㄴ. (거짓) $\lim_{x\to1+0}\{f(x)+g(x)\}=(-1)+1=0$

ㄷ. (참) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)\times\lim_{x\to1-0}g(x)$

$=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)\times\lim_{x\to1+0}g(x)$

$=(-1)\times1=-1$

$f(1)g(1)=(-1)\times1=-1$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

11. 이해력 – 지수함수와 로그함수 〔3점〕 **정답** ②

$f(-1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(0)=-1$이므로

$a(0+1)(0-2)=-1$, $-2a=-1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$

$\log_2 f(x)\le1$에서

$f(x)\le2$

$\frac{1}{2}(x+1)(x-2)\le2$

$x^2-x-2\le4$, $x^2-x-6\le0$

$(x+2)(x-3)\le0$

$\therefore -2\le x\le3$ ……… ㉠

이때, 로그의 진수 조건에 의하여 $f(x)>0$이므로

$\frac{1}{2}(x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>2$ ……… ㉡

㉠, ㉡에서

$-2\le x<-1$ 또는 $2<x\le3$

따라서, 구하는 정수 x는 -2, 3으로 2개이다.

12. 이해력 – 수열의 극한 〔3점〕 **정답** ④

$a_n=(-1)^n\times n$에서

$S_{2n-1}=\{(-1)+2\}+\{(-3)+4\}+\cdots+\{-(2n-3)+(2n-2)\}-(2n-1)$

$=1\times(n-1)-(2n-1)=-n$

$S_{2n}=\{(-1)+2\}+\{(-3)+4\}+\cdots+\{-(2n-1)+2n\}$

$=1\times n=n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{-(2n-1)}=\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{1}{2}$

13. 이해력 – 수열의 극한 〔3점〕 **정답** ④

두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라 하면

$A_n(\alpha_n, \alpha_n+n)$, $B_n(\beta_n, \beta_n+n)$

이고, α_n, β_n은 방정식 $f(x)=x+n$의 두 근이다.

$x^2-2x=x+n$에서

$x^2-3x-n=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=3$, $\alpha_n\beta_n=-n$

$\therefore a_n=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}^2=(\alpha_n-\beta_n)^2+\{(\alpha_n+n)-(\beta_n+n)\}^2$
$=2(\alpha_n-\beta_n)^2$
$=2\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\}$
$=2(9+4n)$
$=8n+18$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(8k+18)=8\times\frac{n(n+1)}{2}+18n$
$=4n^2+22n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+22n}{n^2}=4$

14. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 적분법 [4점] 정답 ⑤

$\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{2n}\right)-g\left(\frac{k-1}{2n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\left\{g\left(\frac{1}{2n}\right)-g\left(\frac{0}{2n}\right)\right\}\frac{1}{n}+\left\{g\left(\frac{2}{2n}\right)-g\left(\frac{1}{2n}\right)\right\}\frac{2}{n}$
$+\left\{g\left(\frac{3}{2n}\right)-g\left(\frac{2}{2n}\right)\right\}\frac{3}{n}+\cdots$
$+\left\{g\left(\frac{n}{2n}\right)-g\left(\frac{n-1}{2n}\right)\right\}\frac{n}{n}$

$=g\left(\frac{1}{2}\right)-\left\{g\left(\frac{0}{2n}\right)+g\left(\frac{1}{2n}\right)+g\left(\frac{2}{2n}\right)+\cdots+g\left(\frac{n-1}{2n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

$=g\left(\frac{1}{2}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{2n}\right)-g\left(\frac{k-1}{2n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{g\left(\frac{1}{2}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{1}{n}\right\}$

$=g\left(\frac{1}{2}\right)-\int_0^1 g\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

$=-\frac{3}{16}-\int_0^1\left(\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{4}x^3\right)dx$

$=-\frac{3}{16}-\left[\frac{1}{80}x^5-\frac{1}{16}x^4\right]_0^1$

$=-\frac{3}{16}-\left(\frac{1}{80}-\frac{1}{16}\right)=-\frac{11}{80}$

15. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 적분법 [4점] 정답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $f'(2)=0$이므로
$12+4a+b=0$
$\therefore 4a+b=-12$ ……… ㉠

조건 (나)에서 $\int_{-1}^{1}f'(x)dx=6$이므로
$f(1)-f(-1)=6$
$2b+2=6$
$\therefore b=2$
$\therefore a=-\frac{7}{2}$ ($\because$ ㉠)
$\therefore f'(x)=3x^2-7x+2$
$\therefore f'(1)=3-7+2=-2$

16. 이해력 - 다항함수의 미분법 [4점] 정답 ②

$y=x^2+1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 (t, t^2+1)에서의 접선의 방정식은
$y-(t^2+1)=2t(x-t)$, 즉 $y=2tx-t^2+1$
이 접선이 점 (a, a)를 지나야 하므로
$a=2ta-t^2+1$
$t^2-2at+a-1=0$ ……… ㉠

점 (a, a)에서 곡선 $y=x^2+1$에 그은 두 접선의 접점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta=a-1$ ……… ㉡

또, 두 접선의 기울기는 각각 2α, 2β이고, 두 접선이 서로 수직이므로
$2\alpha\times2\beta=-1$
$\therefore \alpha\beta=-\frac{1}{4}$
$\therefore a-1=-\frac{1}{4}$ ($\because$ ㉡)
$\therefore a=\frac{3}{4}$

17. 추론 능력(증명) - 수열 [4점] 정답 ⑤

(ii) n이 짝수일 때,
$n=2m$ (m은 자연수)이라 하면
$S_{2m+1}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2m}+a_{2m+1})$
$=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2m+1)^2$
$=\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{m+1}(4k^2-4k+1)$
$=\boxed{\frac{(m+1)(2m+1)(2m+3)}{3}}$

(i), (ii)에 의하여
$a_{2m+1}=S_{2m+1}-S_{2m}$
$=\frac{(m+1)(2m+1)(2m+3)}{3}-\frac{2m(m+1)(2m+1)}{3}$
$=\boxed{(m+1)(2m+1)}$

$a_{2m}=S_{2m}-S_{2m-1}$
$=\frac{2m(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{m(2m-1)(2m+1)}{3}$
$=\boxed{m(2m+1)}$

$\therefore a_n=\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\therefore f(m)=\frac{(m+1)(2m+1)(2m+3)}{3}$
$g(m)=(m+1)(2m+1)$
$h(m)=m(2m+1)$
$i(n)=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore f(5)+g(6)+h(7)+i(8)$
$=\frac{6\times11\times13}{3}+7\times13+7\times15+\frac{8\times9}{2}$
$=286+91+105+36=518$

18. 추론 능력(추측) - 행렬과 그래프 [4점] 정답 ⑤

ㄱ. (참) $A^2B+2A=E$에서
$A(AB+2E)=E$
$\therefore A^{-1}=AB+2E$
따라서, 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. (참) $A^{-1}=AB+2E$에서
$AA^{-1}=AAB+2A$, $A^{-1}A=ABA+2A$
이므로
$AAB+2A=ABA+2A$
$AAB=ABA$
$A^{-1}AAB=A^{-1}ABA$
$\therefore AB=BA$

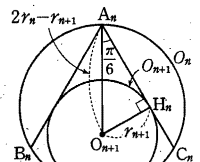
ㄷ. (참) $2A^2=B^2$에서
$A^2=\frac{1}{2}B^2$ ……… ㉠
$A^2B+2A=E$에서
$\frac{1}{2}B^3+2A=E$ ($\because$ ㉠)
$B^3=2(E-2A)=2E-4A$
$\therefore A^6+B^6=\left(\frac{1}{2}B^2\right)^3+B^6=\frac{9}{8}B^6=\frac{9}{8}(B^3)^2$
$=\frac{9}{8}(4A-2E)^2$
$=18\left(A-\frac{1}{2}E\right)^2$

19. 이해력 - 수열의 극한 (4점) 정답 ④

원 O_1의 중심을 O_1이라 하면

$\angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1 = \angle \mathrm{B}_1\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1 = \angle \mathrm{C}_1\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1 = \frac{2}{3}\pi$이므로

$$S_1 = 2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{2}{3}\pi\right)+\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$$



원 O_n의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n이라 하자. 그림과 같이 원 O_{n+1}의 중심 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{O}_{n+1}} = 2r_n - r_{n+1}$, $\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{H}_n} = r_{n+1}$,

$\angle \mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n = \frac{\pi}{6}$

이므로 직각삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{H}_n$에서

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{O}_{n+1}} : \overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{H}_n} = 2 : 1$

$(2r_n - r_{n+1}) : r_{n+1} = 2 : 1$

$2r_{n+1} = 2r_n - r_{n+1}$, $3r_{n+1} = 2r_n$

$\therefore r_{n+1} = \frac{2}{3}r_n$

따라서, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$, 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}}{1-\frac{4}{9}}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{10}$$

20. 이해력 - 확률 (4점) 정답 ①

10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$$

이때, 조건 (가)를 만족시키려면 a, b, c가 모두 짝수이거나 한 개는 짝수, 두 개는 홀수이어야 한다.

(i) a, b, c가 모두 짝수인 경우

abc가 6의 배수이려면 6이 적혀 있는 공은 반드시 선택해야 하므로 2, 4, 8, 10이 적혀 있는 공 중에서 두 개를 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 = 6$

(ii) a, b, c가 한 개는 짝수, 두 개는 홀수인 경우

2, 4, 6, 8, 10에서 한 개, 1, 3, 5, 7, 9에서 두 개를 선택하는 경우이다.

짝수에서 6이 선택되면, 홀수에서 임의로 두 개를 선택해야 하므로

${}_5\mathrm{C}_2 = 10$

짝수에서 6이 아닌 수가 선택되면 홀수에서 적어도 한 개는 3의 배수를 선택해야 하므로

${}_4\mathrm{C}_1 \times ({}_5\mathrm{C}_2 - {}_3\mathrm{C}_2) = 4\times7 = 28$

즉, 구하는 경우의 수는 $10+28=38$이다.

따라서, 구하는 확률은 $\frac{6+38}{120} = \frac{11}{30}$이다.

21. 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 (4점) 정답 ①

$$\log_2(n^2+n) - \log_2(5n+5) = \log_2\frac{n(n+1)}{5(n+1)}$$
$$=\log_2\frac{n}{5}$$

(i) $1\le n\le5$일 때,

$\log_2(n^2+n) \le \log_2(5n+5)$이므로

$A_n \subset B_n$

$\therefore a_n = 0$

(ii) $n>5$일 때,

$\log_2(n^2+n) > \log_2(5n+5)$이므로

$A_n - B_n$

$=\{(n, k) \mid \log_2(5n+5) < k \le \log_2(n^2+n),$ k는 자연수$\}$

$=\{(n, k) \mid 5(n+1) < 2^k \le n(n+1),$ k는 자연수$\}$

이때, $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$이고, $n=6, 7, \cdots, 15$일 때 k의 값은 다음과 같다.

n	$5(n+1)$	$n(n+1)$	k
6	35	42	×
7	40	56	×
8	45	72	6
9	50	90	6
10	55	110	6
11	60	132	6, 7
12	65	156	7
13	70	182	7
14	75	210	7
15	80	240	7

$\therefore a_8 = a_9 = a_{10} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = 1$, $a_{11} = 2$

$\therefore \sum_{n=1}^{15} a_n = 0\times7 + 1\times7 + 2\times1 = 9$

22. 이해력 - 지수함수와 로그함수 (3점) 정답 85

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프를 나타내는 식을 $y=f(x)$라 하면

$f(x) = \log_3(x-4) - 2$

이때, $f(a)=2$이므로

$\log_3(a-4) - 2 = 2$

$\log_3(a-4) = 4$

$a-4 = 81$

$\therefore a = 85$

23. 이해력 - 행렬과 그래프 (3점) 정답 5

$\begin{pmatrix} 1 & a+2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 1-a & a+2 \\ 4 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

주어진 연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} 1-a & a+2 \\ 4 & -a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$-a(1-a) - 4(a+2) = 0$

$a^2 - 5a - 8 = 0$ ························ ㉠

㉠의 판별식을 D라 하면

$D = 25 - 4\times(-8) = 57 > 0$

이므로 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 5이다.

24. 이해력 - 통계 (3점) 정답 36

$\frac{1}{3} + 3a + a = 1$에서 $a = \frac{1}{6}$이므로 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X) = 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{1}{6} = 1$

$\mathrm{V}(X) = 0^2\times\frac{1}{3} + 1^2\times\frac{1}{2} + 3^2\times\frac{1}{6} - 1^2 = 1$

$\therefore \mathrm{V}(6X+2) = 6^2\times\mathrm{V}(X) = 36$

25. 수학 외적 문제 해결 능력 - 확률 (3점) 정답 68

전체 학생 중에서 임의로 선택한 한 명의 학생이 지각하는 사건을 A, 버스를 타고 등교하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{a}{100}\times\frac{1}{40} + \frac{100-a}{100}\times\frac{1}{20}$$
$$=\frac{a}{4000} + \frac{100-a}{2000} = \frac{200-a}{4000}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{100-a}{100}\times\frac{1}{20} = \frac{100-a}{2000}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{100-a}{2000}}{\frac{200-a}{4000}} = \frac{200-2a}{200-a} = \frac{16}{33}$$

$\therefore a = 68$

26. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열 (4점) 정답 770

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(a+b) & d(a+b) \\ c(a+b) & d(a+b) \end{pmatrix}$

이때, $a+b=n$, $c+d=n$이므로 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$2c(a+b) + 2d(a+b) = 2(a+b)(c+d) = 2n^2$

$\therefore a_n = 2n^2$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} 2n^2 = 2\times\frac{10\times11\times21}{6} = 770$

27. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 적분법 (4점) 정답 120

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$에서

$F'(x) = f(x) = x^3 - 12x + m$

함수 $F(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x) = x^3 - 12x + m$에서

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$f'(x) = 0$에서

$x = -2$ 또는 $x = 2$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나려면 (극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로
$f(-2)\times f(2)<0$
$(m+16)(m-16)<0$
$\therefore -16<m<16$
따라서, 구하는 자연수 m은 1, 2, …, 15이고, 그 합은 $\dfrac{15\times(1+15)}{2}=120$이다.

28. 수학 외적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 [4점] 정답 70

점 A에서 지름의 길이가 a(cm)인 원의 중심까지의 거리가 $6a$(cm)이고 점 A에서 출발하여 이 원의 내부까지 마우스 포인터를 이동하는 동작을 반복할 때, 이 동작을 한 번 하는 데 걸린 평균시간이 0.8(초)이므로

$0.8=k+0.5\log\left(\dfrac{6a}{a}+1\right)$

$0.8=k+0.5\log 7$ ……… ㉠

점 A에서 지름의 길이가 mb(cm)인 원의 중심까지의 거리가 b(cm)이고 점 A에서 출발하여 이 원의 내부까지 마우스 포인터를 이동하는 동작을 반복할 때, 이 동작을 한 번 하는 데 걸린 평균시간이 1.3(초)이므로

$1.3=k+0.5\log\left(\dfrac{b}{mb}+1\right)$ ……… ㉡

㉡−㉠을 하면

$0.5=0.5\left\{\log\left(\dfrac{b}{mb}+1\right)-\log 7\right\}$

$\log\dfrac{\frac{1}{m}+1}{7}=1$

$\dfrac{\frac{1}{m}+1}{7}=10,\ \dfrac{1}{m}+1=70$

$\therefore m=\dfrac{1}{69}$

$\therefore p=69,\ q=1$

$\therefore p+q=70$

29. 수학 외적 문제 해결 능력 - 통계 [4점] 정답 175

이 공장에서 생산되는 음료수 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 4^2)$을 따르므로 임의추출한 음료수 4개의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(250,\ \left(\dfrac{4}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(250,\ 2^2)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}\left(\overline{X}<\dfrac{988}{4}\right)=\mathrm{P}(\overline{X}<247)$

$=\mathrm{P}\left(Z<\dfrac{247-250}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z<-1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

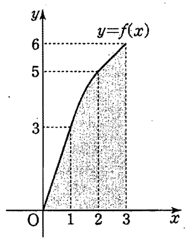
$=0.5-0.43=0.07$

따라서, 하루 평균 불량품으로 판정되는 상자의 개수는 $\dfrac{10000}{4}\times 0.07=175$이다.

신유형

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 적분법 [4점] 정답 67

$\int_0^3 f(x)dx$가 최댓값을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



$$f(x)=\begin{cases} 3x & (0\le x<1) \\ ax^2+bx+c & (1\le x\le 2) \\ x+3 & (2<x\le 3)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$f(x)=ax^2+bx+c\ (1\le x\le 2)$에서
$f'(x)=2ax+b$
$f'(1)=2a+b=3$ ……… ㉠
$f'(2)=4a+b=1$ ……… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=5$
함수 $f(x)=-x^2+5x+c$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-0}f(x)=f(1)$
$3=-1+5+c,\ c=-1$
$\therefore f(x)=-x^2+5x-1\ (1\le x\le 2)$

$\therefore M=\int_0^3 f(x)dx$

$=\int_0^1 3x\,dx+\int_1^2(-x^2+5x-1)dx+\int_2^3(x+3)dx$

$=\left[\dfrac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-x\right]_1^2+\left[\dfrac{1}{2}x^2+3x\right]_2^3$

$=\dfrac{3}{2}+\left\{\left(-\dfrac{8}{3}+10-2\right)-\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{2}-1\right)\right\}+\left\{\left(\dfrac{9}{2}+9\right)-(2+6)\right\}$

$=\dfrac{67}{6}$

$\therefore 6M=6\times\dfrac{67}{6}=67$

[B형]

1. 계산 능력 - 행렬과 그래프 [2점] 정답 ④

$A-2B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $A-2B$의 모든 성분의 합은 $(-4)+3+3+2=4$이다.

2. 계산 능력 - 함수의 극한과 연속 [2점] 정답 ③

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\times 2+\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

$=2+1=3$

3. 계산 능력 - 적분법 [2점] 정답 ③

$\int_0^1(e^x+2e^{2x})dx-\int_0^1 e^x dx=\int_0^1 2e^{2x}dx$

$=\left[e^{2x}\right]_0^1=e^2-1$

4. 이해력 - 일차변환과 행렬 [3점] 정답 ⑤

일차변환 f를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$이고, 직선 $y=x$에 대한 대칭변환 g를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이다. 합성변환 $f\circ g$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

이므로 합성변환 $f\circ g$에 의하여 점 (1, 2)가 옮겨진 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 0\end{pmatrix}$

$\therefore a=7,\ b=0$

$\therefore a+b=7$

5. 이해력 - 삼각함수 [3점] 정답 ④

두 직선 $y=x$, $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$\tan\theta_1=1,\ \tan\theta_2=2$

$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$

$=\dfrac{2-1}{1+1\times 2}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\dfrac{3}{4}$

6. 이해력 - 벡터 [3점] 정답 ②

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$이므로

$5^2=5^2-2\times 5\times 4\cos\theta+4^2$

$40\cos\theta=16$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{2}{5}$

7. 이해력 - 수열의 극한 [3점] 정답 ①

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+2n-3}{n}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2n-3}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+2-\frac{3}{n}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}+2-\frac{3}{n}\right)-\left(2-\frac{3}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+2-\frac{3}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right)$

$=0-2=-2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{na_n-3n^2+2n}{2n^2-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}-3+\frac{2}{n}}{2-\frac{3}{n}}$

$=\frac{-2-3+0}{2-0}=-\frac{5}{2}$

8. 이해력 – 이차곡선 (3점) 정답 ①

직선 AD의 기울기가 -1이므로 $y=-x+a$

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{8\times(-1)^2+2}$

$=-x\pm\sqrt{10}$

$\therefore a=\sqrt{10}$ ($\because a>0$)

$\therefore$ A$(0, \sqrt{10})$, B$(-\sqrt{10}, 0)$, C$(0, -\sqrt{10})$, D$(\sqrt{10}, 0)$

이때,

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{(0-\sqrt{10})^2+(\sqrt{10}-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

따라서, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로 구하는 넓이는 $2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=20$이다.

9. 이해력 – 미분법 (3점) 정답 ③

$f(3x-1)=x^3-x^2+9$에서

$f(2)=f(3\times1-1)=1^3-1^2+9=9$

$f'(3x-1)\times3=3x^2-2x$

$f'(3x-1)=\frac{3x^2-2x}{3}$

$f'(2)=f'(3\times1-1)=\frac{3\times1^2-2\times1}{3}=\frac{1}{3}$

$g(x)=\sqrt{f(x)}$라 하면 $g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{f(2+h)}-\sqrt{f(2)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$

$=g'(2)$

$=\frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{2\times\sqrt{9}}=\frac{1}{18}$

10. 이해력 – 확률 (3점) 정답 ⑤

한 개의 주사위를 던져 6의 약수 1, 2, 3, 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다. 이때, 점 P가 144°만큼 회전하는 횟수를 a, 72°만큼 회전하는 횟수를 b라 하면 점 P가 점 A를 출발하여 한 바퀴를 돌아 다시 점 A에 도착하는 경우는 다음과 같다.

(i) $a=2$, $b=1$인 경우

${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

(ii) $a=1$, $b=3$인 경우

${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

(iii) $a=0$, $b=5$인 경우

${}_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

따라서, 구하는 확률은 $\frac{4}{9}+\frac{8}{81}+\frac{1}{243}=\frac{133}{243}$이다.

11. 이해력 – 지수함수와 로그함수 (3점) 정답 ④

$f(-1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(0)=-1$이므로

$a(0+1)(0-2)=-1$, $-2a=-1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$

$\log_{\frac{1}{2}}|f(x)|\geq-1$에서

로그의 진수 조건에 의하여 $|f(x)|>0$이므로

$\left|\frac{1}{2}(x+1)(x-2)\right|>0$

$\therefore x\neq-1$, $x\neq2$

$\log_{\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{2}(x+1)(x-2)\right|\geq-1$에서

$\left|\frac{1}{2}(x+1)(x-2)\right|\leq2$

$-2\leq\frac{1}{2}(x+1)(x-2)\leq2$

$-4\leq x^2-x-2\leq4$

(i) $x^2-x-2\geq-4$에서

$x^2-x+2\geq0$

$x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-8<0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2-x+2>0$이다.

(ii) $x^2-x-2\leq4$에서

$x^2-x-6\leq0$, $(x+2)(x-3)\leq0$

$\therefore -2\leq x\leq3$

따라서, 주어진 부등식의 해는 $-2\leq x\leq3$, $x\neq-1$, $x\neq2$이므로 구하는 정수 x는 -2, 0, 1, 3으로 4개이다.

12. 수학 내적 문제 해결 능력 – 미분법 (3점) 정답 ②

$y=\sin x\sin2x-\cos2x-1$

$=\sin x(2\sin x\cos x)-(2\cos^2x-1)-1$

$=2\sin^2x\cos x-2\cos^2x$

$=2(1-\cos^2x)\cos x-2\cos^2x$

$=-2\cos^3x-2\cos^2x+2\cos x$

이때, $\cos x=t\ (-1\leq t\leq1)$라 하면

$f(t)=-2t^3-2t^2+2t$에서

$f'(t)=-6t^2-4t+2=-2(t+1)(3t-1)$

$f'(t)=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{3}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-2	↗	$\frac{10}{27}$	↘	-2

따라서, 구하는 최댓값은 $\frac{10}{27}$이다.

13. 이해력 – 미분법 (3점) 정답 ②

$\tan\theta=\frac{1}{3}$이므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x$

함수 $f(x)=-x^2+x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+x=\frac{1}{3}x$에서

$x^2-\frac{2}{3}x=0$

$x\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

한편, $f'(x)=-2x+1$이므로 점 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기는

$f'\left(\frac{2}{3}\right)=(-2)\times\frac{2}{3}+1=-\frac{1}{3}$

14. 수학 내적 문제 해결 능력 - 적분법 [4점] 정답 ③

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 교점의 x좌표는

$-x^2+x=(\tan\theta)x$에서

$x(x-1+\tan\theta)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1-\tan\theta$

$$\therefore S(\theta)=\int_0^{1-\tan\theta}\{(-x^2+x)-(\tan\theta)x\}dx$$
$$=\int_0^{1-\tan\theta}\{-x^2+(1-\tan\theta)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(1-\tan\theta)x^2\right]_0^{1-\tan\theta}$$
$$=-\frac{1}{3}(1-\tan\theta)^3+\frac{1}{2}(1-\tan\theta)^3$$
$$=\frac{1}{6}(1-\tan\theta)^3$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^3}=\frac{1}{6}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\left(\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}\right)^3$$

이때, $\frac{\pi}{4}-\theta=t$라 하면 $\theta=\frac{\pi}{4}-t$

$\theta\to\frac{\pi}{4}-0$이면 $t\to+0$이고,

$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$이므로

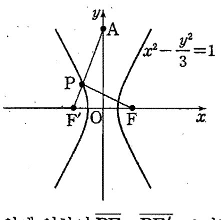
$$\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\frac{1-\frac{1-\tan t}{1+\tan t}}{t}=\frac{2\tan t}{t(1+\tan t)}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^3}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\left(\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}\right)^3$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{t\to+0}\left\{\frac{2\tan t}{t(1+\tan t)}\right\}^3$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{t\to+0}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^3\times\lim_{t\to+0}\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)^3$$
$$=\frac{1}{6}\times1^3\times2^3=\frac{4}{3}$$

15. A형 17번과 동일 [4점] 정답 ⑤

16. A형 18번과 동일 [4점] 정답 ⑤

17. 이해력 - 이차곡선 [4점] 정답 ②



쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF}-\overline{PF'}=2$이므로

$\overline{PF}=\overline{PF'}+2$

$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PF'}+2\geq\overline{AF'}+2$

점 P가 선분 AF' 위에 있을 때 최솟값 8을 가지므로

$\overline{AF'}=6$

이때, 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 초점의 좌표는 F(2, 0), F'(−2, 0)이므로

$\overline{AF'}=\sqrt{(0+2)^2+(a-0)^2}=\sqrt{a^2+4}$

$\therefore a^2+4=36$

$\therefore a^2=32$

18. A형 19번과 동일 [4점] 정답 ④

19. 수학 외적 문제 해결 능력 - 통계 [4점] 정답 ④

멜론 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 16^2)$을 따르므로 크기가 4인 표본의 표본 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{16}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 8^2)$을 따른다. 이때, 4개를 임의추출하여 만든 멜론 한 상자의 무게가 3360 g 이하일 확률이 0.0668이므로

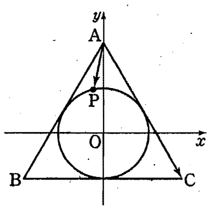
$$\mathrm{P}\left(\overline{X}\leq\frac{3360}{4}\right)=\mathrm{P}(\overline{X}\leq840)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{840-m}{8}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{840-m}{8}\right)$$
$$=0.0668$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{840-m}{8}\right)=0.4332$$

$$-\frac{840-m}{8}=1.5$$

$\therefore m=852$

20. 이해력 - 벡터 [4점] 정답 ①



원 O의 중심을 원점으로 하고, 점 A가 y축 위에 있도록 삼각형 ABC와 원 O를 좌표평면 위에 나타내자. 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고, 원점은 삼각형 ABC의 무게중심이므로

A(0, 2), B$(-\sqrt{3},\ -1)$, C$(\sqrt{3},\ -1)$

원 O 위를 움직이는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},\ -1)-(0,\ 2)=(\sqrt{3},\ -3)$

$\overrightarrow{AP}=(x,\ y)-(0,\ 2)=(x,\ y-2)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=(\sqrt{3},\ -3)\cdot(x,\ y-2)$

$=\sqrt{3}x-3(y-2)$

$=\sqrt{3}x-3y+6$

이때, $\sqrt{3}x-3y+6=k$라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 원의 중심과 직선

$\sqrt{3}x-3y+6-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{3}\times0-3\times0+6-k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}}\leq1$$

$|6-k|\leq2\sqrt{3}$

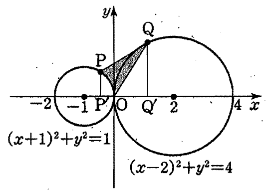
$-2\sqrt{3}\leq k-6\leq2\sqrt{3}$

$\therefore 6-2\sqrt{3}\leq k\leq6+2\sqrt{3}$

따라서, 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값 $M=6+2\sqrt{3}$, 최솟값 $m=6-2\sqrt{3}$이다.

$\therefore Mm=(6+2\sqrt{3})(6-2\sqrt{3})=36-12=24$

21. 수학 내적 문제 해결 능력 - 미분법 [4점] 정답 ①



$\mathrm{P}(\cos\pi t-1,\ \sin\pi t)$, $\mathrm{Q}(2-2\cos\pi t,\ 2\sin\pi t)$이므로 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면

$\mathrm{P'}(\cos\pi t-1,\ 0)$, $\mathrm{Q'}(2-2\cos\pi t,\ 0)$

$S(t)=$(사각형 PP'Q'Q의 넓이)

$-$(도형 PP'O의 넓이)$-$(삼각형 QOQ'의 넓이)

$$=\frac{1}{2}(\sin\pi t+2\sin\pi t)\times\{2-2\cos\pi t-(\cos\pi t-1)\}$$
$$-\left(\frac{1}{2}\pi t-\frac{1}{2}\sin\pi t\cos\pi t\right)$$
$$-\frac{1}{2}\times2\sin\pi t(2-2\cos\pi t)$$
$$=\frac{9}{2}\sin\pi t(1-\cos\pi t)-\frac{1}{2}\pi t$$
$$+\frac{1}{2}\sin\pi t\cos\pi t-2\sin\pi t(1-\cos\pi t)$$
$$=\frac{5}{2}\sin\pi t(1-\cos\pi t)+\frac{1}{2}\sin\pi t\cos\pi t-\frac{1}{2}\pi t$$
$$=\frac{5}{2}\sin\pi t\left(1-\cos\pi t+\frac{1}{5}\cos\pi t\right)-\frac{1}{2}\pi t$$
$$=\frac{5}{2}\sin\pi t\left(1-\frac{4}{5}\cos\pi t\right)-\frac{1}{2}\pi t$$

$$S'(t)=\frac{5}{2}\pi\cos\pi t\left(1-\frac{4}{5}\cos\pi t\right)$$
$$+\frac{5}{2}\sin\pi t\times\frac{4}{5}\pi\sin\pi t-\frac{1}{2}\pi$$

$$\therefore S'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{2}\pi\cos\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{4}{5}\cos\frac{\pi}{3}\right)$$
$$+\frac{5}{2}\sin\frac{\pi}{3}\times\frac{4}{5}\pi\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\pi$$
$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{7}{4}\pi$$

22. 계산 능력 - 방정식과 부등식 [3점] 정답 17

$\frac{x^2+14}{x^2-2x+1}\geq2$에서

$$\frac{x^2+14-2(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}\geq0$$

$-x^2+4x+12\geq0,\ x\neq1$

$x^2-4x-12\leq0,\ x\neq1$

$(x+2)(x-6)\leq0,\ x\neq1$

$\therefore -2\leq x\leq6,\ x\neq1$

따라서, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, $-1, 0, 2, 3, 4, 5, 6$이고, 그 합은

$(-2)+(-1)+0+2+3+4+5+6=17$이다.

23. 이해력 - 확률 〔3점〕 **정답** 21

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$$

$\therefore p=16, q=5$

$\therefore p+q=21$

24. 이해력 - 공간도형과 공간좌표 〔3점〕 **정답** 7

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-1-2+a}{3}, \frac{1-4+a+1}{3}, \frac{0-5+a-2}{3}\right)$$

즉, $\left(\frac{a-3}{3}, \frac{a-2}{3}, \frac{a-7}{3}\right)$

점 G가 xy평면 위의 점이므로

$$\frac{a-7}{3}=0$$

$\therefore a=7$

25. 이해력 - 순열과 조합 〔3점〕 **정답** 31

$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)=12$를 만족시키는 경우는 $f(1), f(3), f(5), f(7)$의 값이

$(1, 1, 3, 7), (1, 1, 5, 5), (1, 3, 3, 5), (3, 3, 3, 3)$ 중의 하나의 값을 갖는 경우이다.

(i) $(1, 1, 3, 7)$ 또는 $(1, 3, 3, 5)$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}\times 2=24$$

(ii) $(1, 1, 5, 5)$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

(iii) $(3, 3, 3, 3)$을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{4!}=1$$

따라서, 구하는 함수 f의 개수는 $24+6+1=31$이다.

26. A형 28번과 동일 〔4점〕 **정답** 70

27. 이해력 - 방정식과 부등식 〔4점〕 **정답** 4

$x^2-4x+2n=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4-2n$$

이므로 $n>2$일 때 $x^2-4x+2n>0$이다.

(i) $n=1$일 때,

$(x-n)(x^2-4x+2n)<0$에서

$(x-1)(x^2-4x+2)<0$

$(x-1)\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}<0$

$x<2-\sqrt{2}$ 또는 $1<x<2+\sqrt{2}$

$\therefore A_1=\{2, 3\}$

(ii) $n=2$일 때,

$(x-n)(x^2-4x+2n)<0$에서

$(x-2)^3<0,\ x<2$

$\therefore A_2=\{1\}$

(iii) $n\geq 3$일 때,

$(x-n)(x^2-4x+2n)<0$에서

$x^2-4x+2n>0$이므로

$x-n<0,\ x<n$

$\therefore A_n=\{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$

따라서, $A_3=\{1, 2\}$이고, $n\geq 4$일 때 집합 A_n의 원소의 개수는 3 이상이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 자연수 n은 1, 3이고, 그 합은 4이다.

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열 〔4점〕 **정답** 48

두 점 $(2, 0)$, $(n, \log_k n)$을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$보다 작거나 같으므로

$$\frac{\log_k n-0}{n-2}\leq\frac{1}{2}$$

$$\log_k n\leq\frac{n-2}{2}$$

$$n\leq k^{\frac{n-2}{2}}$$

$\therefore n^2\leq k^{n-2}$

$n=3$일 때, $3^2\leq k$이므로 $f(3)=9$

$n=4$일 때, $4^2\leq k^2$이므로 $f(4)=4$

$n=5$일 때, $5^2\leq k^3$이므로 $f(5)=3$

$n=6$일 때, $6^2\leq k^4$이므로 $f(6)=3$

$n=7$일 때, $7^2\leq k^5$이므로 $f(7)=3$

$n=8$일 때, $8^2\leq k^6$이므로 $f(8)=2$

$n=9$일 때, $9^2\leq k^7$이므로 $f(9)=2$

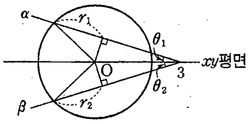
$\vdots$

$n=20$일 때, $20^2\leq k^{18}$이므로 $f(20)=2$

$$\therefore \sum_{n=3}^{20} f(n)=9+4+3\times 3+2\times 13=48$$

29. A형 30번과 동일 〔4점〕 **정답** 67

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 공간도형과 공간좌표 〔4점〕 **정답** 9



그림과 같이 xy평면과 평면 α가 이루는 각을 θ_1, xy평면과 평면 β가 이루는 각을 θ_2라 하면

$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{3}$ ……………………………… ㉠

또, 두 평면 α, β에 의하여 구가 잘려서 생기는 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면

$r_1^2=2^2-(3\sin\theta_1)^2$, $r_2^2=2^2-(3\sin\theta_2)^2$이므로

$$S_1+S_2=\pi(r_1^2+r_2^2)$$

$$=\pi\{8-9(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)\}$$

$$=\pi\left[8-9\left\{1-\frac{1}{2}(\cos 2\theta_1+\cos 2\theta_2)\right\}\right]$$

$$=\pi\left\{-1+\frac{9}{2}(\cos 2\theta_1+\cos 2\theta_2)\right\}$$

$$=\pi\left[-1+\frac{9}{2}\left\{\cos 2\theta_1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta_1\right)\right\}\right]$$

($\because$ ㉠)

$$=\pi\left\{-1+\frac{9}{2}\left(\cos 2\theta_1-\frac{1}{2}\cos 2\theta_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta_1\right)\right\}$$

$$=\pi\left\{-1+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta_1\right)\right\}$$

$$=\pi\left\{-1+\frac{9}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\theta_1\right)\right\}$$

따라서, S_1+S_2의 최댓값은 $\frac{\pi}{6}+2\theta_1=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\theta_1=\frac{\pi}{6}$일 때 $\frac{7}{2}\pi$이다.

$\therefore p=2, q=7$

$\therefore p+q=9$