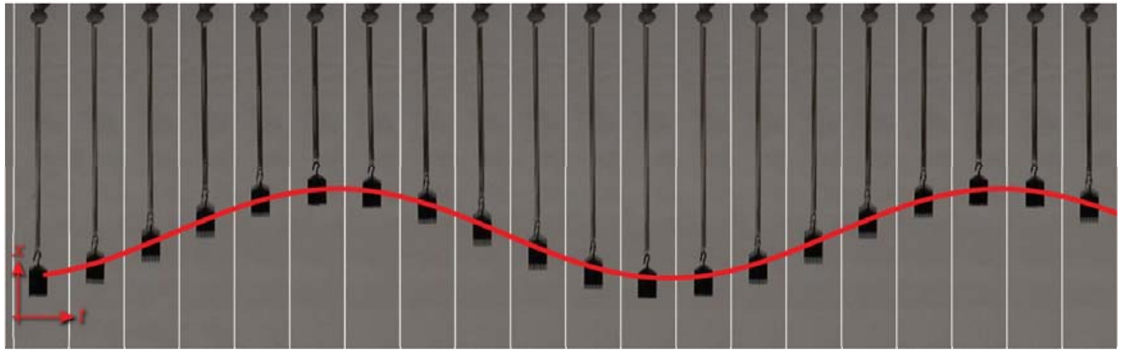
14 진동

조화진동자를 이용하여 시간을 잰다. (a) 오래된 괘종시계의 다중 노출 사진. (b) NIST에서 만든 세계에서 가장 작은 원자시계. 세슘 원자가 매초 92억 번 진동한다. 원자시계의 크기는 쌀알만 하고, 100억분의 1, 즉 300년 동안에 1초 이내로 정밀하다.

- 단순조화운동
- 용수철 진자
- 진자
- 각속력, 주기
- 진폭, 위상각
- 감쇠조화운동
- 감쇠
- 강제조화운동
- 공명

14.1 단순조화운동

- 주기운동 (periodic motion)
- **단순조화운동 (simple harmonic motion)**
  - 변위에 선형인 힘에 의한 특별한 종류의 주기운동 : $\boldsymbol{F_x = -kx}$



  - 안정평형점 근처에서의 작은 진동

$$F(x) = \underbrace{F(x_0)}_{=0} + \underbrace{F'(x_0)}_{<0}(x - x_0) + \cancel{\frac{1}{2!}F''(x_0)(x - x_0)^2} + \cdots \approx -k(x - x_0)$$

안정평형점 조건

작은 진동일 경우
고차항을 무시할 수 있다.

  - 운동방정식

$$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

▪ 선형 미분방정식 (linear differential equation)

- 선형성 (linearity)
  - x(t)와 그 미분들의 1차식 = 0 인 미분방정식은 선형성을 가진다.
  - $x_1(t),\ x_2(t)$가 해라면 선형조합 $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$도 역시 해가 된다.

- 계수가 모두 상수인 경우의 해

$$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0}$$

- 해가 e^{ax} 형태로 주어진다. : 방정식에 e^{ax} 를 넣어서 상수 a를 구한다

$$x(t)=e^{ax} \Rightarrow \left(a^2+\frac{k}{m}\right)e^{ax}=0 \Rightarrow a=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}\equiv \pm i\omega_0$$

- 두 개의 해 $e^{+i\omega_0 t},\ e^{-i\omega_0 t}$ 가 존재하며, 일반해는 이 둘의 선형조합이다.

$$x(t)=C_1e^{i\omega_0 t}+C_2e^{-i\omega_0 t}=B_1\cos(\omega_0 t)+B_2\sin(\omega_0 t)=A\cos(\omega_0 t+\theta_0)$$

$$\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$B_1=(C_1+C_2)$$

$$B_2=i(C_1-C_2)$$

$$\cos(\theta+\phi)=\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi$$

$$A=\sqrt{B_1^2+B_2^2}$$

$$\theta_0=-\arctan(B_2/B_1)$$

- 각 상수의 명칭

각속력 (angular speed)

운동방정식에서 결정된다.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

초기조건으로 결정된다.

진폭 (amplitude)

위상각 (phase angle)

- **초기조건 (initial conditions)**
  - 두 상수 B_1, B_2 (또는 A, θ_0)는 무엇으로 결정되는가?

$$x(t) = B_1\cos(\omega_0 t) + B_2\sin(\omega_0 t)$$
$$v(t) = -\omega_0 B_1\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B_2\cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \quad x_0 \equiv x(0) = B_1$$
$$v_0 \equiv v(0) = \omega_0 B2$$

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \phi_0 = \arctan\left(\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right)$$

▪ 위치, 속도, 가속도

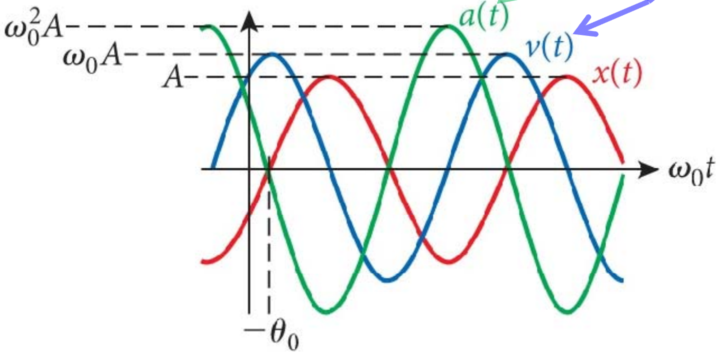
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

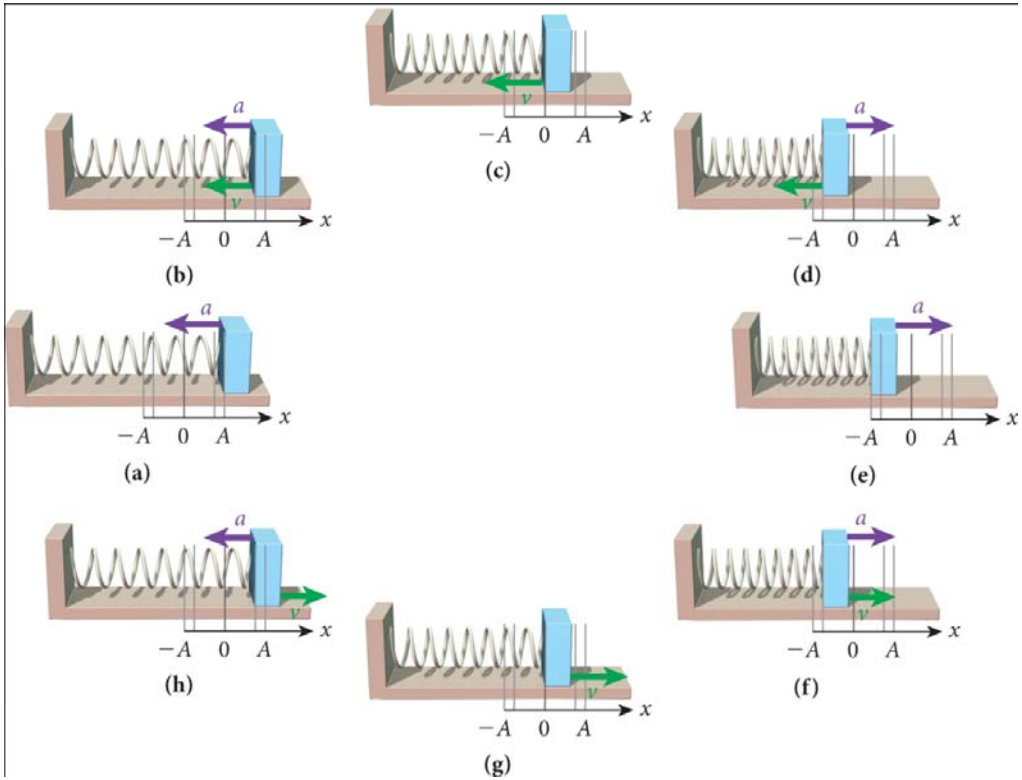
$$v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$= -\omega_0 A \cos(\omega_0 + \theta_0 - \pi/2)$$

$$a(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \theta_0 - \pi)$$





▪ 주기와 진동수

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

• 용수철 진자의 주기 : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

보기문제 14.2 달을 관통하는 터널

달 표면에서부터 구멍을 파서 달의 중심을 지나 반대편까지 터널을 뚫었다고 하자. 터널의 한쪽 끝에서 질량 5.0 kg의 강철구를 놓아주면 어떤 운동을 하는가?

- 달 내부에서의 중력의 크기 : $F_g(r) = -G\dfrac{M(r)m}{r^2}, \quad M(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad \rho = \dfrac{M_M}{\frac{4}{3}\pi R_M^3}$

$$\Rightarrow \quad F_g(r) = -\frac{GM_M m}{R_M^3} r \quad \Longrightarrow \quad \text{단순조화운동}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{GM_M m}{R_M^3}\right) \Big/ m} = \sqrt{\frac{GM_M}{R_M^3}}$$

- 초기조건

$$r(0) = R_M, \quad v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(t) = R_M \cos(\omega_0 t)$$

- 수치

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}})(7.35\times10^{22}\,\mathrm{kg})}{(1.735\times10^{6}\,\mathrm{m})^3}} = 9.69\times10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6485\,\mathrm{s}$$

$$v_{max} = \omega_0 R_M = 1680\,\mathrm{m/s}$$

풀이문제 14.1 용수철에 매단 토막

용수철상수 k=2.55 N/m의 수평 용수철에 매단 질량 1.55 kg의 토막이 마찰 없는 수평면에서 미끄러진다. 토막을 오른쪽으로 d=5.75 cm 당겼다가 정지상태에서 놓아준다. 1.5 s 후 토막의 속도는 얼마인가?

- 토막은 단순조화운동을 한다.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

- 초기조건으로부터 A와 ϕ_0를 구한다.

$$x(0) = A\cos\phi_0 = d, \quad v(0) = A\sin\phi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = d, \quad \phi_0 = 0$$

$$x(t) = d\cos(\omega_0 t), \quad v(t) = -\omega_0 d\sin(\omega_0 t)$$

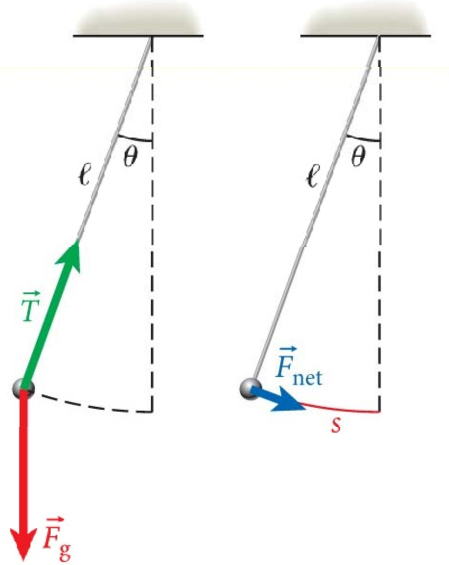
- 1.5 s 후의 속력

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2.55\,\mathrm{N/m}}{1.55\,\mathrm{kg}}} = 1.28\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$v(t = 1.50\,\mathrm{s}) = -(1.28\,\mathrm{s}^{-1})(0.0575\,\mathrm{m})\sin\big((1.28\,\mathrm{s}^{-1})(1.50\,\mathrm{s})\big) = -0.0692\,\mathrm{m/s}$$

14.2 진자의 운동

- **진자 (pendulum)**
  - 중력장에서 줄 끝에 매달린 물체의 운동



$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$s = \ell\theta$$

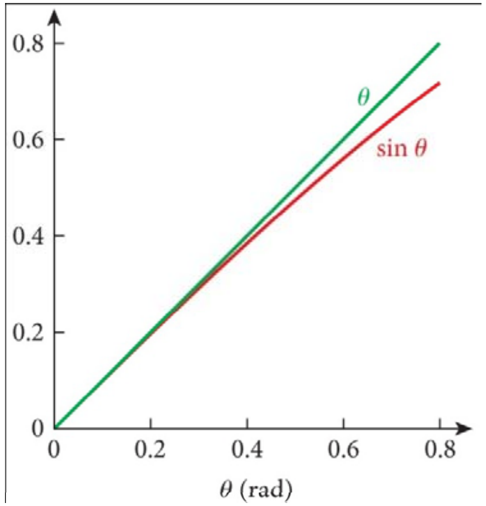
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

θ 가 충분히 작으면
$\sin\theta \approx \theta$ 로 근사할 수 있다.

$$\sin\theta = \theta - \tfrac{1}{3!}\theta^3 + \tfrac{1}{5!}\theta^5 + \cdots$$



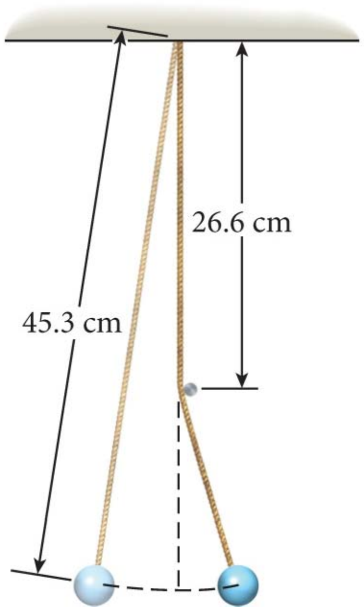
  - 진자의 주기와 진동수

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

진자의 등시성 :진자의 주기는 (진폭이 충분히 작으면) 진폭에 관계가 없다.

보기문제 14.3 한정된 진자

길이 45.3 cm의 진자가 천장에 매달려 있다. 그러나 회전점 아래 26.6 cm에 튀어나온 못 때문에 진자의 운동이 제한된다. 진동의 주기는 얼마인가?



- 못 왼쪽에서의 운동과 오른쪽에서의 운동으로 분리하여 생각한다.

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{2\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} + \sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\right)$$

$$= \pi\frac{\sqrt{0.453\,\mathrm{m}} + \sqrt{0.187\,\mathrm{m}}}{\sqrt{9.81\,\mathrm{m/s^2}}} = 1.11\,\mathrm{s}$$

14.3 조화진동의 일과 에너지

- 용수철에 매단 질량
  - 역학에너지의 보존

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

적분 ↓ ↑ 미분

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

운동상수 (에너지)

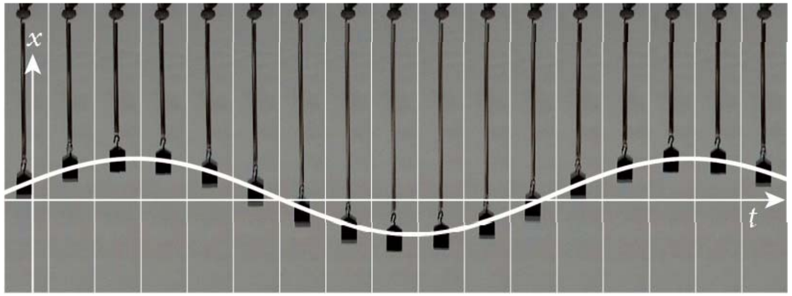
  - 운동에너지와 퍼텐셜에너지의 진동

  - 운동상수를 이용한 운동방정식 풀기

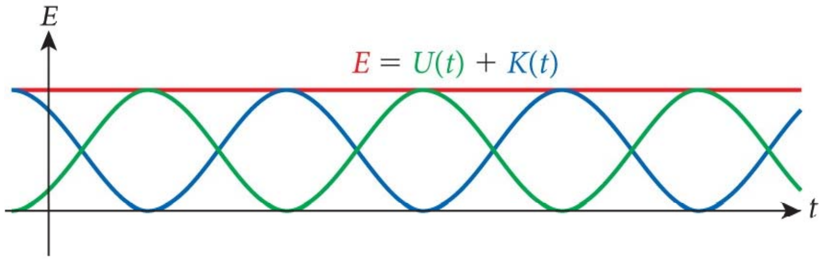
$$\Rightarrow \quad v(x) = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}dt$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{A}\right) = \omega_0(t - t_0)$$



(a)



(b)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \theta_0)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$K + U = \frac{1}{2}kA^2 = E$$

▪ 진자의 에너지

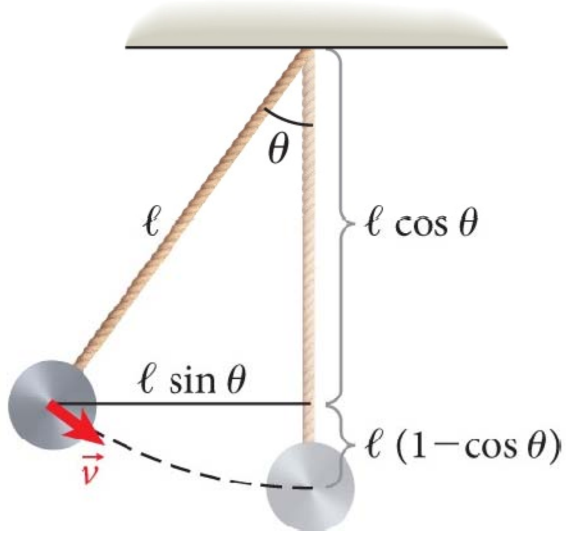
• 역학에너지 보존

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\sin\theta = 0$$

적분 ↓ ↑ 미분

$$\frac{1}{2}m\left(\ell\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_{\text{max}}$$

운동상수 (에너지)



$$K = \frac{1}{2}m\left(\ell\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \; U = mg\ell(1-\cos\theta) \;\Rightarrow\; K + U = mg\ell(1-\cos\theta_{\text{max}}) = E$$

• 작은 각에 대한 근사

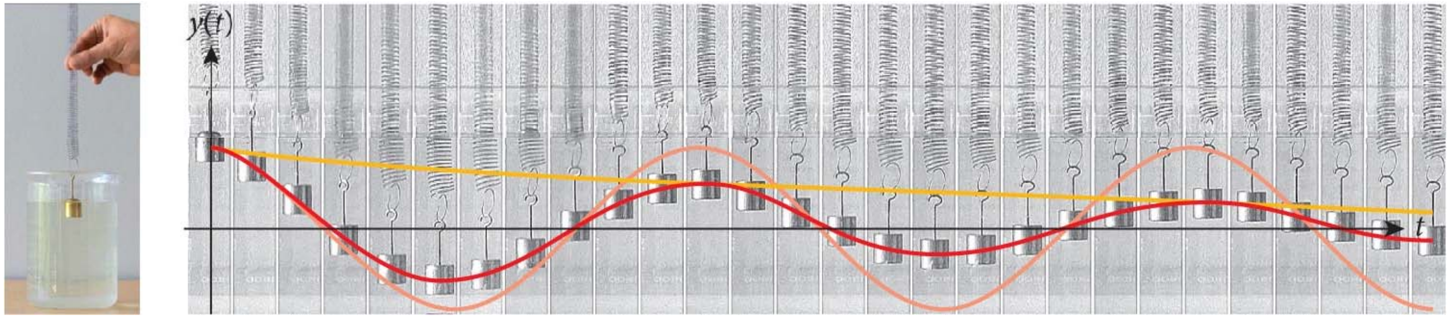
$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$ ➡ 단순조화운동의 결과를 준다.

• 운동방정식 풀기

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_{\text{max}})} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_{\text{max}})}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}dt$$

14.4 감쇠조화운동

- **감쇠 (damping)**



감쇠조화운동의 예 : 물속에서 진동하는 용수철에 매단 질량

- 감쇠효과 : 많은 진동은 시간이 지나면 감쇠한다.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

감쇠효과는 속력에 의존
속력이 작을 경우 속력의 1차항이 가장 중요

$$F_\gamma(v) = \underbrace{F_\gamma(0)}_{=0} + \underbrace{F'_\gamma(0)}_{<0,\ \text{감속}}v + \mathcal{O}(v^2)$$

- 감쇠조화운동의 운동방정식

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

▪ 감쇠조화운동의 운동방정식 풀기

$$x(t) = e^{at} \quad : \quad ma^2 + ba + k = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$a = -\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{where} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma \equiv \frac{b}{2m}$$

- $b < 2\sqrt{mk}$: $a = -\gamma \pm i\omega', \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

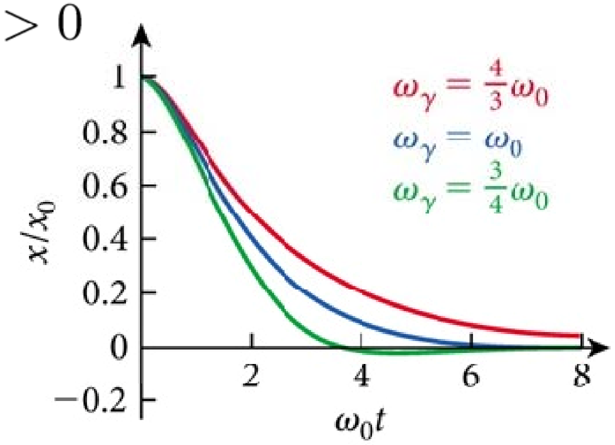
$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t + i\omega' t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega' t} = e^{-\gamma t}\left[B_1 \cos(\omega' t) + B_2 \sin(\omega' t)\right]$$

- $b > 2\sqrt{mk}$: $a = -\gamma_\pm, \quad \gamma_\pm = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_+ t} + C_2 e^{-\gamma_- t}$$

- $b = 2\sqrt{mk}$: $a = -\gamma \quad \Rightarrow \quad e^{-\gamma t},\ te^{-\gamma t}$

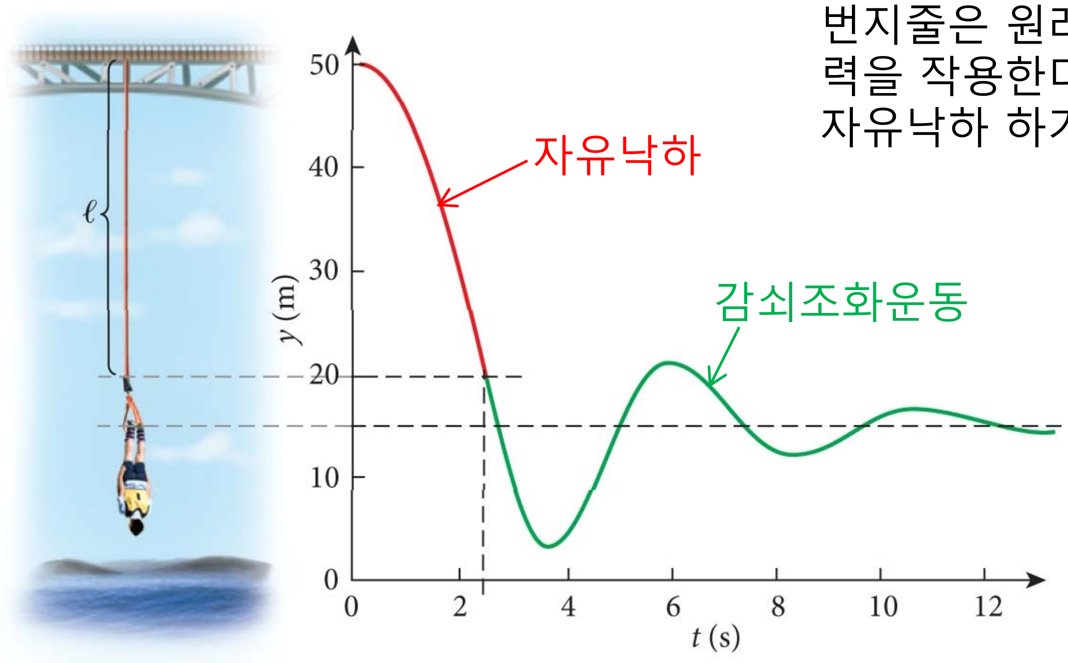
$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$$



보기문제 14.5 번지점프

깊은 계곡의 다리는 번지점프에 최적이다. 번지점프의 첫 부분에서는 늘어나지 않은 번지줄과 같은 길이만큼 자유낙하한다. 다리의 높이가 50 m이고, 길이 30 m의 번지줄에 70 kg의 점퍼가 매달렸을 때 5 m늘어난다. 따라서 번지줄의 평형길이는 35 m이다. 한편 번지줄의 감쇠 가속력은 0.3 s^{-1}이다.

번지점퍼의 수직운동을 시간의 함수로 기술해라.



번지줄은 원래의 길이보다 늘어났을 때만 복원력을 작용한다. 따라서 점퍼는 y의 값에 따라서 자유낙하 하거나 감쇠조화운동을 하게 된다.

- $y > h - \ell$:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

- $y < h - \ell$:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + k(h - \ell - y) - b\frac{dy}{dt}$$

보기문제 14.6 감쇠조화운동

용수철상수 k=1.00 N/m의 용수철에 매단 질량 m=1.00 kg의 물체가 감쇠상수 b=2.00 kg/s의 매질 속에서 움직인다. 물체는 평형위치로부터 x=+5 cm인 곳에서 정지상태로 놓아준다. 1.75 s 후에 물체는 어디에 있는가?

- 감쇠정도

$$2\sqrt{mk} = 2\sqrt{(1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{N/m})} = 2\,\mathrm{kg/s} = b \quad \Longrightarrow \quad \text{임계감쇠}$$

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}, \qquad \gamma = \frac{2.00\,\mathrm{kg/s}}{2(1.00\,\mathrm{kg})} = 1.00\,\mathrm{s}^{-1}$$

- 초기조건

$$x(0) = C_1 = 5\,\mathrm{cm}$$

$$v(0) = -\gamma C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \gamma C_1 = (5\,\mathrm{cm})(1.00\,\mathrm{s}^{-1})$$

- 1.75 s 후의 위치

$$x(1.75\,\mathrm{s}) = (5\,\mathrm{cm})[1 + (1.00\,\mathrm{s}^{-1})(1.75\,\mathrm{s})]e^{-(1.00\,\mathrm{s}^{-1})(1.75\,\mathrm{s})} = 2.39\,\mathrm{cm}$$

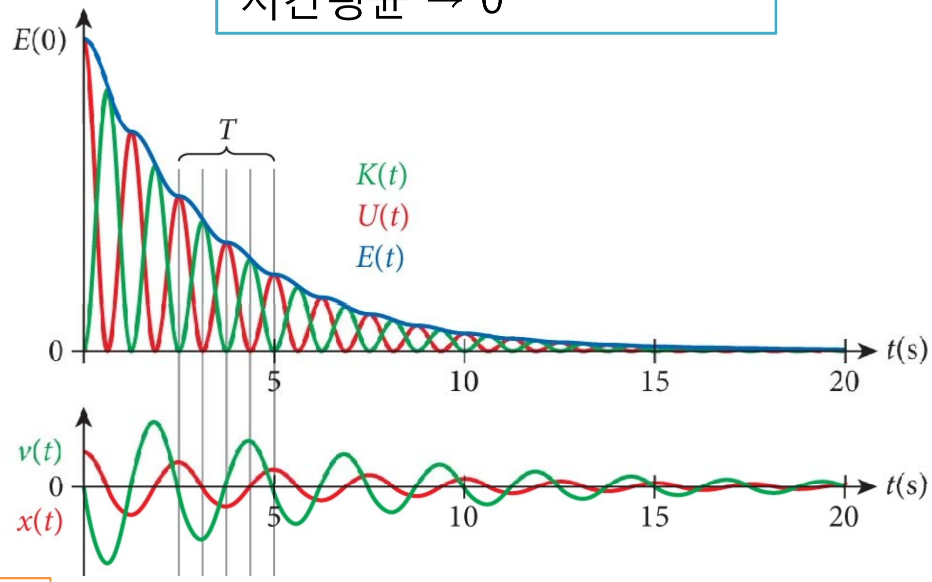
▪ 감쇠진동의 역학에너지 손실

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t)$$
$$v(t) = -\omega' Ae^{-\gamma t}\sin(\omega' t) - \gamma Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\left[\omega' Ae^{-\gamma t}\sin(\omega' t) + \gamma Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t)\right]^2 + \frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega' t)$$
$$= \frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t}\left[\left(1+\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)\cos^2(\omega' t) + \frac{\omega'^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega' t) + 2\frac{\omega'\gamma}{\omega_0^2}\sin(\omega' t)\cos(\omega' t)\right]$$
$$= \frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t}\left[1 + \frac{\omega'\gamma}{\omega_0^2}\sin(2\omega' t) + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\cos(2\omega' t)\right]$$

상대적으로 작은 진동 부분
시간평균 → 0

에너지의 시간평균은
지수함수로 감소



$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)$$
$$= v\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right)$$
$$= -bv^2$$
$$= vF_\gamma$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

14.5 강제조화운동과 공명

- **강제조화운동**
  - 운동방정식

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = \underline{F_d \cos(\omega_d t)}$$

주기적인 외부 구동력
periodic deriving force

  - 일반해

$$x(t) = \underbrace{A_d \cos(\omega_d t - \phi)}_{\text{particular solution}} + x_0(t)$$

homogeneous solution

$$m\frac{d^2x_0}{dt^2} + b\frac{dx_0}{dt} + kx_0 = 0$$

$$A_d = \frac{F_d}{m\sqrt{(\omega_0 - \omega_d^2)^2 + 4\omega_d^2\gamma^2}}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\omega_d\gamma}{\omega_0^2 - \omega_d^2}\right)$$

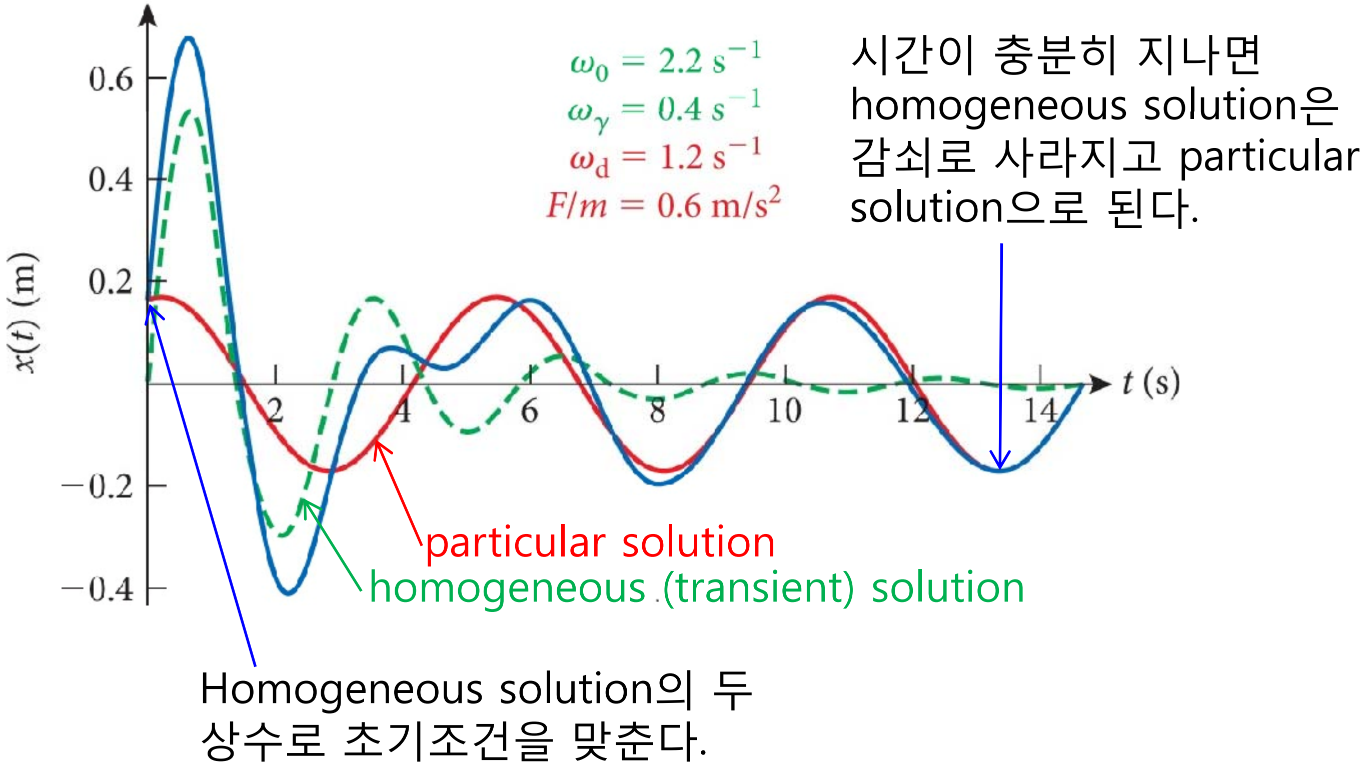
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{b}{2m}$$

일반해의 확인 : 일반해를 운동방정식에 대입하면

$$A_d\left[(-m\omega_d^2 + k)\cos(\omega_d t - \phi) - b\omega_d \sin(\omega_d t - \phi)\right]$$

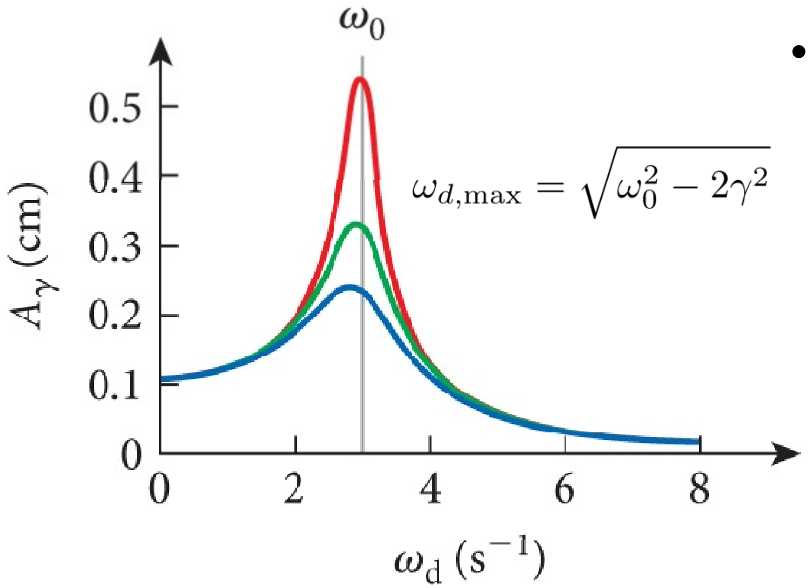
$$= A_d m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (\omega_d\gamma)^2}\cos\left(\omega_d t - \phi + \arctan\left(2\omega_d\gamma/(\omega_0^2 - \omega_d^2)\right)\right) = F_d\cos(\omega_d t)$$

- 강제조화운동의 해



$\omega_0 = 2.2\ \mathrm{s}^{-1}$
$\omega_\gamma = 0.4\ \mathrm{s}^{-1}$
$\omega_\mathrm{d} = 1.2\ \mathrm{s}^{-1}$
$F/m = 0.6\ \mathrm{m/s}^2$
$x(t)$ (m)
t (s)
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
2
4
6
8
10
12
14
시간이 충분히 지나면 homogeneous solution은 감쇠로 사라지고 particular solution으로 된다.
particular solution
homogeneous (transient) solution
Homogeneous solution의 두 상수로 초기조건을 맞춘다.

▪ **공명 (resonance)**



- 구동진동수에 따른 진폭의 변화

$$A_d = \frac{F_d}{m\sqrt{(\omega_0 - \omega_d^2)^2 + 4\omega_d^2\gamma^2}}$$

구동진동수가 고유진동수에 근접하면 진폭이 최대로 커진다.
⇒ 에너지 전달이 극대화

⟹ **공명**

- 공명 현상의 예

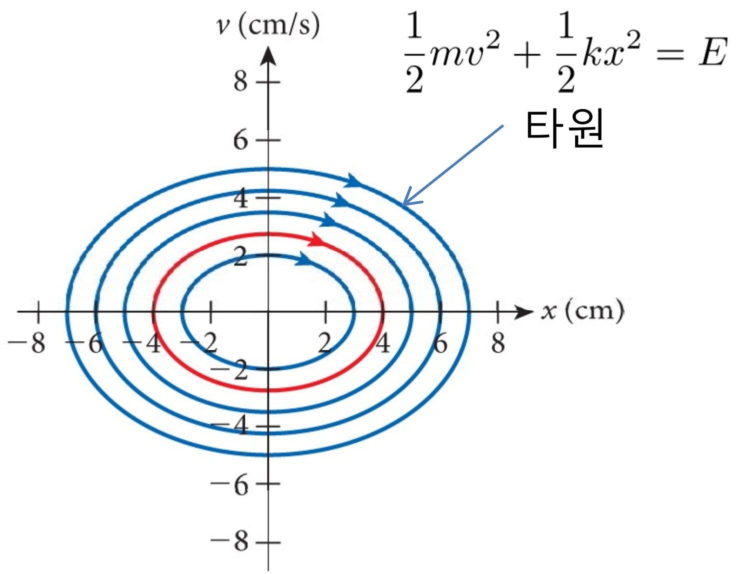
그네 밀기

소리로 유리잔 깨기

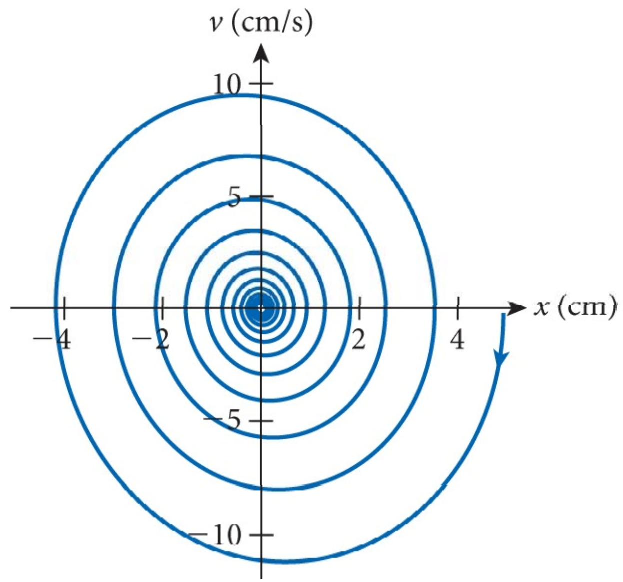
강풍에 의한 Tacoma narrow bridge 붕괴

14.6 위상공간

- 위상공간
  - 운동을 속도(운동량)-변위 공간에서 기술하는 것이 편리할 수 있다.



단순조화운동



감쇠조화운동

14.7 혼돈