분산투자기법

contents

제1장 투자관리의 기본체계

1. 통합적 투자관리

투자관리의 핵심은 투자수익과 투자위험 면에서 성격이 다른 여러 가지 투자자산들에 대하여 투자자금을 효율적으로 배분하여 투자목표를 달성하는 것이라고 할 수 있다. 투자관리에는 다음과 같은 3가지 과제가 있다.

① 특정 개별종목 선택
② 분산투자(자산배분)의 방법
③ 투자시점의 선택

많은 경우 투자관리는 상향식(bottom up)의 방식으로 진행되는 경향이 있으나 이와 같은 투자관리 방법은 체계적이고 과학적인 투자관리 방법이 되지 못하는 경우가 많다. 투자목표의 설정으로부터 시작하여 목표달성을 위한 투자전략과 전술을 수집・실행하고, 투자결정 후 사후조정・통제하는 일련의 과정으로 이루어지는 통합적 투자관리(integrated investment management)가 필요한데 이러한 투자관리는 투자목표설정, 자산배분결정, 종목선정의 순서로 이어지기 때문에 하향식(top down) 투자관리라고 한다.

2. 목표설정과 투자분석

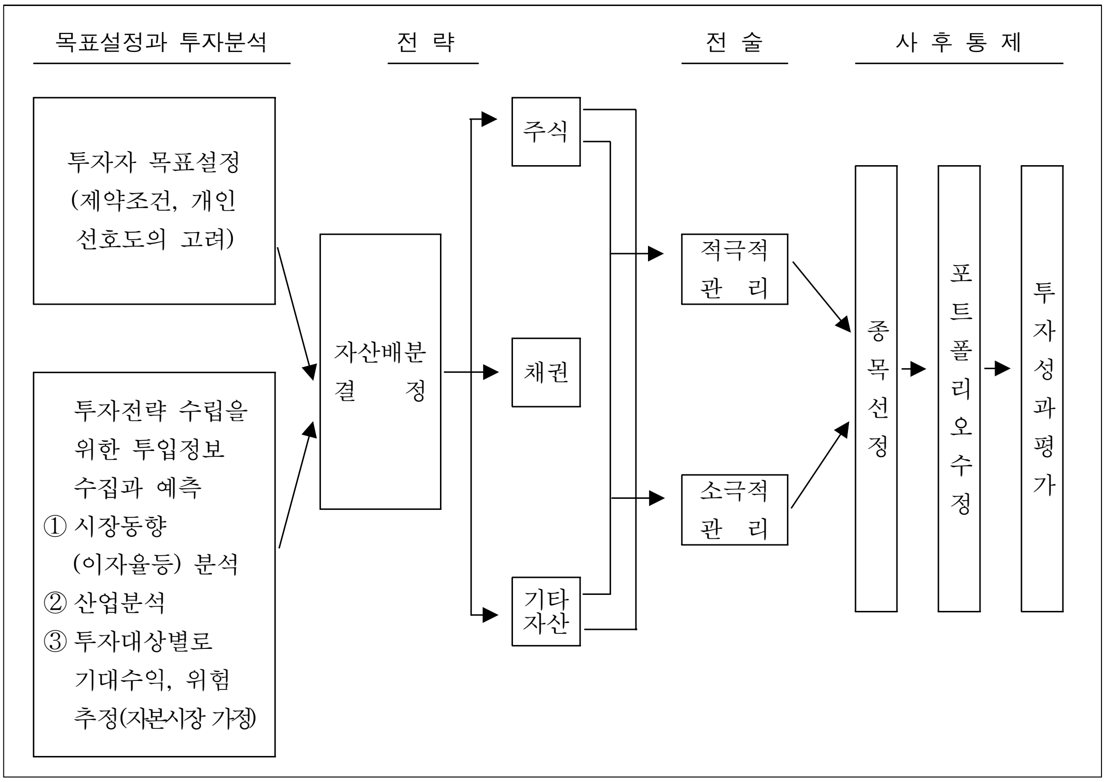
[그림 1]은 통합적 투자관리과정을 정리한 것인데 그림과 같은 네 단계로 구분해 볼 수 있다. 첫 단계는 투자목표 설정과 투자분석 단계이다.

가. 투자목표의 설정

투자목표(investment objectives)를 설정하기 위해서는 다음과 같은 여러 가지 제약조건과 투자자의 개인적 선호도를 고려해야 한다.

- 투자시계(time horizon) : 현재의 결정(판단)은 얼마동안 지속될 것인가? 투자성과는 언제 거두고자 하는가?
- 위험수용도(risk tolerance levels) : 예상되는 기대수익률의 변동성(위험)은 어느 정도까지 수용할 수 있는가?
- 세금관계 : 면세, 종합금융소득세의 적용여부
- 법적 규제(제약) : 기관투자자의 경우 소형주에 대한 투자금지, 특정주식에 대한 투자비율의 제한
- 투자자금의 성격 : 장/단기자금의 여부, 자금의 융통 여부, 신규자금유입여부 등
- 고객의 특별한 요구사항 : 중도유동성 요구액(liquidity requirements)
- 투자목표 : 기대 투자수익의 수준(수익률「%」과 금액「₩」으로 표시), 투자에 대한 수익성(기대수익), 안정성(위험), 환금성 등에 대한 투자 기본방침을 수립한다.

[그림 1] 통합적 투자관리과정



나. 투자분석과 자본시장 가정

투자목표를 달성하기 위해서는 구체적인 투자전략이 필요한데 이를 위해서는 사전적으로 정보수집과 투자분석의 과정이 필요하다. 투자분석을 근간으로 전반적인 자본시장에 대한 가정(capital market assumption)을 설정하게 된다.

- 경제분석 : 미래의 경기순환, GNP성장률, 이자율 동향 등과 같은 장·단기 경제 예측, 정치·사회적 돌출변수 예상
- 산업분석 : 산업별 동향분석
- 기업분석 : 주요 종목별로 기대수익과 위험추정

3. 투자전략과 투자관리

둘째 단계는 투자목표를 완성하기 위하여 주식과 채권 그리고 기타자산(현금 등)으로 나누어 투자자금을 어떻게 배분할 것인가 하는 자산배분(asset allocation)에 관한 투자전략이 마련되어야 한다. 이 같은 투자전략의 수립에는 자산배분의 기준, 종목(증권)선정의 기준과 분산투자의 상한선이 설정될 필요가 있다. 셋째 단계는 투자전술(investment tactics)을 수립하는 과정인데 보편적으로 투자전술에는 소극적 투자관리기법과 적극적 투자관리기법이 활용되고 있다. 적극적 투자관리는 증권시장이 비효율적인 것을 전제로 하여 과소 혹은 과대 평가된 증권에 투자하여 일정한 위험수준에 상응하는 투자수익 이상의 초과수익을 추구하는 투자관리를 말하며 소극적 투자관리는 증권시장이 효율적인 것을 전제로 하여 시장평균수준의 투자수익을 얻거나 투자위험을 감수하고자 하는 투자관리방법이다.

- 자산배분(asset allocation, asset mix)의 기준 : 투자대상으로 고려되는 투자자산의 종류를 어떤 자산으로 한정할 것인가?, 주식, 채권, 현금 이외에 부동산 등도 포함시킬 것인가?, 각급 투자자산에 대한 투자비율을 결정하는 기준을 무엇으로 할 것인가?

4. 사후통제

넷째 마지막 단계는 사후적으로 조정・통제하는 과정으로서 포트폴리오 수정과 투자성과평가가 이루어지는 단계이다. 포트폴리오 성과평가(performance evaluation)는 투자관리과정에서 구성한 포트폴리오의 투자성과를 일정한 척도에 의해서 평가하는 통제과정이다. 투자성과가 위험을 감안할 때 평균 이상의 성공적 성과를 거두었는지, 평균이하의 성과를 거두었는지를 평가하고, 그 같은 성과의 원인이 초과수익이 큰 종목선정에

서 기인하는지, 적절한 분산투자에서 기인하는지 또는 적절한 투자시점의 포착에서 기인하는지를 분석하는 것은 차후의 더 나은 투자성과를 위하여 필요한 과정이다. 이상에서 투자관리의 여러 가지 측면을 살펴보았는데 투자결정과 직결되는 부문은 자산배분과 종목선정의 두 가지 분야이다. 즉, 주식, 회사채, 국공채, 부동산, 정기예금 등 투자수익과 위험이 질적으로 상이한 각급 투자자산들에 투자자금을 포괄적으로 어떻게 배분할 것인가를 결정하는 자산배분(asset allocation)의 문제와 각급 투자자산 중에서 구체적이고 개별적으로 시장동향, 산업별 특성, 개별기업의 경쟁적 지위 등을 감안하여 특정종목을 선정(security selection)하는 일이 투자결정에 있어 핵심적인 과제가 된다.

제2장 포트폴리오 분석

1. 포트폴리오 분석의 의의

가. 포트폴리오 관리의 의의

일반적으로 투자자들은 둘 이상의 자산에 분산하여 투자를 하는 경우가 많은데 이것은 투자자산이 한 곳에 편중됨으로써 생길 수 있는 위험을 줄이기 위한 보다 합리적인 투자방법이다. 이처럼 하나 이상 다수의 자산이나 증권의 결합을 포트폴리오(portfolio)라고 한다. 포트폴리오 관리(portfolio management)란 여러 투자자산에 분산하여 투자하는 활동을 체계적으로 계획하고 실행하며 사후통제하는 것을 말한다. 그런데 투자수익과 투자위험은 상반관계(trade off)에 있으므로, 일정한 기대수익에 대해서 위험을 최소화시키거나, 일정한 위험에 대해서 기대수익을 최대화시키는 효율적 분산투자(efficient diversification)를 하는 것이 포트폴리오 관리의 목표가 된다.

나. 포트폴리오 분석의 특징

포트폴리오 분석의 특징은 투자가치평가를 개별자산의 관점이 아니라 포트폴리오의 관점에서 한다는 점이다. 투자가치를 분석하는 데 있어서 기본적 분석에서처럼 투자대상을 개별적으로 분석하는 것과 다수 증권으로 구성된 포트폴리오의 관점

에서 분석하는 것은 큰 차이가 있다. 왜냐하면 다수의 증권 중에서 어느 특정증권이 포트폴리오 내에서 지니는 투자위험의 크기는 나머지 다른 증권과의 상관관계, 결합관계에 따라 달라지기 때문이다. 포트폴리오 분석의 또 하나의 특징은 분석의 초점이 효율적 위험저감(risk diversification)의 방법과 최적포트폴리오 구성방법을 찾는데 있다는 점이다.

2. 최적투자결정의 체계

가. 기대수익률과 위험의 측정

증권이 갖는 투자대상으로서의 가치는 그 증권으로부터 예상되는 기대수익과 위험의 두 가지 요인에 의해서 결정된다고 할 수 있다. 즉,

$$V(\text{증권의 가치}) = f(\text{기대수익, 위험})$$

왜냐하면 어느 증권이나 자산이 지니는 가치는 그 투자대상으로부터 예상되는 투자수익에 달려 있다. 그러나 기대수익은 미래에 실현되지 않을 가능성이 있으므로 불확실성을 내포하고 있다고 할 수 있다. 그러므로 투자대상으로부터 기대되는 수익성과 이에 따르는 불확실성 즉, 위험을 동시에 고려하여 증권의 가치를 평가하여야 한다. 이 위험을 고려하는 한 방법은 미래 발생 가능한 상황과 그 상황이 일어날 확률 그리고 각 상황에서의 예상수익률을 추정하여 발생 가능한 수익률의 확률분포를 작성하는 것이다. 더욱이 미래 수익률의 확률분포가 정규분포인 것을 가정하면 투자대상의 수익성과 위험을 기대수익률과 분산으로 측정할 수 있으므로 투자대상의 계량적인 평가가 가능해진다. 기대수익률(expected rate of return)은 실제의 수익률이 가질 수 있는 여러 가지 가능한 값들의 평균적인 값으로 식(2-1)과 같이 구한다.

$$E(R) = \sum_{i=1}^{m} p_i r_i \tag{2-1}$$

E(R) : 개별자산의 기대수익률
p_i : 상황 i가 발생할 확률(일어날 상황은 m가지)
r_i : 상황 i가 발생할 때의 수익률

그런데 실제로 실현되는 수익률은 이 기대수익률과 다른 것이 일반적이다. 미래 불확실한 상황에서의 수익률의 변동성(variability), 즉 기대수익률이 실현되지 않을 가능성을 위험이라고 한다. 이 위험의 크기는 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있지만, 가장 널리 이용되는 방법은 수익률의 확률분포가 정규분포임을 가정하여 분산(variance) 혹은 표준편차(standard deviation)라는 통계치를 사용하는 것이다. 분산 혹은 표준편차는 수익률이 가질 수 있는 여러 가지 값이 기대수익률로부터 얼마나 차이가 있는가를 나타내는 것인데, 다음과 같이 정의된다.

$$Var(R) = \sigma^2 = E[r - E(R)]^2$$

$$= \sum [\gamma_i - E(R)]^2 \cdot p_i \tag{2-2}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(R)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [r_i - E(R)]^2 \cdot p_i} \tag{2-3}$$

단, $Var(R) = \sigma^2$: 수익률의 분산 σ = 수익률의 표준편차

결국 포트폴리오 이론은 증권의 가치가 다음 식(2-4)과 같이 기대수익률과 분산에 의해서 결정된다고 보는 셈이다.

$$V(\text{증권의 가치}) = f[E(R), \sigma^2] \tag{2-4}$$

이처럼 수익률의 확률분포로부터 평균·분산, 두 모수만 추정되면 투자대상의 가치를 평가할 수 있고, 투자결정의 기준으로 삼을 수 있다는 의미에서 이를 평균·분산기준(MV기준 : mean variance criterion)이라고 한다. 이제 평균·분산기준에 의해서 개별증권을 평가하는 예를 보기로 하자. 먼저 미래에 대한 여러 가지 예측자료를 근거로 하여 <표 1>의 확률분포를 얻었다고 하자. 즉, 세 가지 경제상황(불황, 정상, 호황)이 예상되고 각 상황이 일어날 확률이 각기 0.25, 0.50, 0.25 그리고 주식 X, Y, Z의 상황별 발생 가능한 수익률이 이 표에 표시되어 있다.

〈표 1〉 주식 X, Y, Z의 수익률의 확률분포

경제상황	확 률	예상수익률(ri)		
		주 식 X	주 식 Y	주 식 Z
불 황	0.25	−0.10	0.00	0.10
정 상	0.5	0.10	0.05	0.05
호 황	0.25	0.30	0.10	0.00

먼저 주식 X, Y, Z의 기대수익률을 식(2-1)에 의하여 구하면 다음과 같이 주식 X는 10%, 주식 Y와 Z는 각각 5%가 된다.

$$E(R_X) = (-0.10)(0.25) + (0.10)(0.50) + (0.30)(0.25) = 0.10$$
$$E(R_Y) = (0.00)(0.25) + (0.05)(0.50) + (0.10)(0.25) = 0.05$$
$$E(R_Z) = (0.10)(0.25) + (0.05)(0.50) + (0.00)(0.25) = 0.05$$

한편 이 기대수익률이 실현되지 않을 가능성, 즉 위험을 분산(표준편차)에 의해서 계량적으로 측정하면 주식 X의 표준편차는 <표 2>와 같이 14.14%가 되고, 주식 Y와 Z는 3.54%가 된다.

〈표 2〉 주식 X의 위험(분산 · 표준편차)의 계산

상 황	확률(P_i)	예상수익률(r_i)	$r_i-E(R)$	$[r_i-E(R)]^2$	$p_i[r_i-E(R)]^2$
불 황	0.25	−0.10	−0.1−0.1	0.04	0.01
정 상	0.50	0.10	0.1−0.1	0.00	0.00
호 황	0.25	0.30	0.3−0.1	0.04	0.01

$$\sigma_x^2=\sum P_i[r_i-E(R)]^2=0.02$$

$$\therefore\ \sigma_x=\sqrt{0.02}=14.14\%$$

$$\sigma_y^2=(0.00-0.05)^2 0.25+(0.05-0.05)^2 0.50+(0.10-0.05)^2 0.25=0.001253$$

$$\therefore\ \sigma_y=\sqrt{0.001253}=3.54\%$$

$$\sigma_z^2=(0.10-0.05)^2 0.25+(0.05-0.05)^2 0.50+(0.00-0.05)^2 0.25=0.001253$$

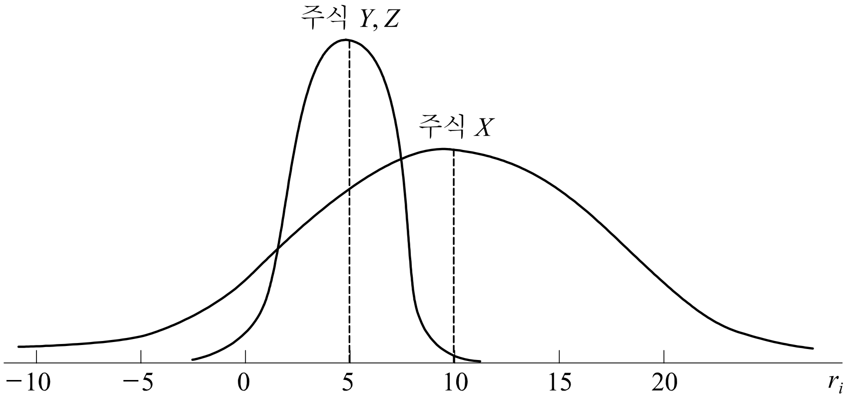
$$\therefore\ \sigma_z=\sqrt{0.001253}=3.54\%$$

〈표 3〉 주식 X, Y, Z의 기대수익률과 표준편차

	주식 X	주식 Y	주식 Z
기대수익률($E(R)$)	10%	5%	5%
표준편차(σ)	14.14%	3.54%	3.54%

따라서 이들 개별주식의 가치를 기대수익률과 표준편차로 평가하면 주식 X가 Y, Z보다 수익성도 높고 위험도 크다. 반면 주식 Y와 Z는 주식 X와 비교하여 볼 때 수익성도 낮고 위험도 작다. 즉, 수익성과 위험이 상반관계(trade off)에 있음을 알 수 있다. 수익률의 확률분포가 정규분포인 것을 가정하였으므로 이를 그림으로 나타내면 [그림 2]와 같다.

[그림 2] 주식 X, Y, Z의 확률분포(정규분포 가정)



그러면 투자자 입장에서 볼 때 주식 X, Y, Z 중 어떤 주식을 택해야 할 것인가? 이들 주식의 수익성과 위험은 서로 상반관계에 있으므로 우열을 가릴 수 없으며 결국 선택은 투자자의 위험에 대한 선호도에 달려 있다. 투자자가 위험선호형이라면 주식 X를 최적 투자안으로 택하겠지만, 위험회피형이라면 주식 Y나 Z를 최적 투자안으로 선택할 것이다.

나. 증권의 최적선택

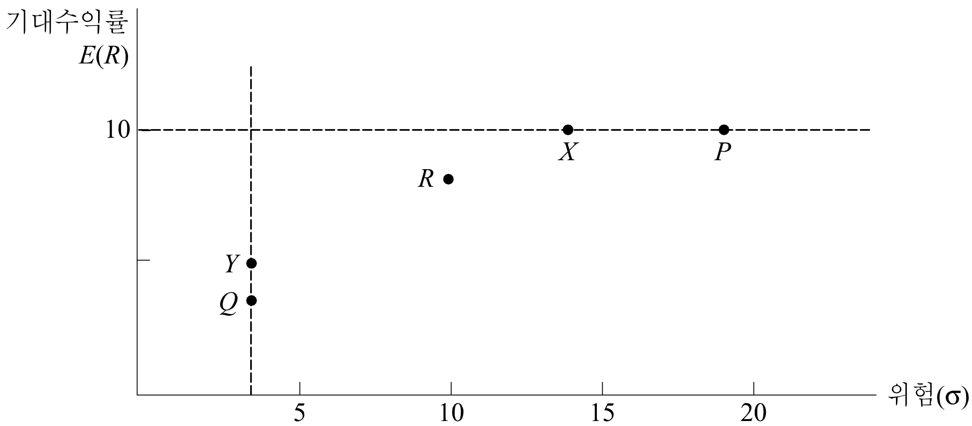
(1) 지배원리와 효율적 증권의 선택

<표 4>의 각 주식의 기대수익률과 위험을 그림으로 나타내면 [그림 3]과 같다. 여기서 먼저 주식 X와 주식 P를 비교하면 기대수익률은 10%로 동일하나, 표준편차로 측정된 위험은 주식 P가 X보다 높으므로 주식 X가 주식 P를 지배한다. 다음 주식 Y가 주식 Q를 비교하면 위험은 3.54%로 동일하나, 기대수익률은 주식 Y가 높다. 주식 Y가 주식 Q를 지배하는 우월한 투자대상이다. 한편, 주식 R은 주식 X와 Y에 비교할 때 기대수익률과 위험 두 가지 요인을 고려해서는 우열이 가려지지 않는다. 그래서 평균·분산기준에 근거하여 투자대상의 우열을 가리면 일단 주식 P, Q는 선택대상에서 제외되고 주식 X, Y 그리고 R만이 고려대상이 된다.

〈표 4〉 개별주식의 기대수익성과 위험

주 식 / 수익성과 위험	X	Y	P	Q	R
기대수익률(%)	10	5	10	4	8
표준편차(%)	14.14	3.54	18	3.54	10

[그림 3] 지배원리를 충족시키는 효율적 증권의 선택



이와 같은 방법으로 투자대상을 선별하는 것을 지배원리라고 한다. 지배원리(dominance principle)는 위험이 동일한 투자대상들에서는 기대수익이 가장 높은 것을 선택하고, 기대수익이 동일한 투자대상들에서는 위험이 가장 낮은 투자대상을 선택하는 방법을 말한다. 이처럼 지배원리를 충족시켜 선택된 증권을 효율적 증권이라고 하며, 포트폴리오의 경우 효율적 포트폴리오(efficient portfolio)라고 부른다.

(2) 투자자의 위험에 대한 태도와 무차별효용곡선

이제 X, Y, R 중에서 어느 증권을 최종적으로 선택할 것인가? 이들 효율적 증권들은 서로 지배되지 않는 증권이므로 결국 투자자의 위험에 대한 태도, 즉 기대수익과 위험이 동시에 고려될 때 투자자가 주관적으로 느끼는 만족도인 효용의 크기에 따라 최종선택을 할 수밖에 없다. 위험회피형 투자자의 효용은 기대수익이 높을수록 그리고 위험은 낮을수록 커진다. 그러나 기대수익이 높더라도 위험이 커지게 되면 투자자에 따라서는 효용이 감소할 수도 있다. 위험감수에 대한 투자수익의 증가, 즉 위험보상(risk premium)의 정도에 대해서 투자자들이 느끼는 만족도는 사람마다 다르기 때문이다. 효용함수(utility function)는 투자자산들의 기대수익과 위험이 주어졌을 때 위험회피도의 정도에 따라 달라지는 만족의 정도를 지수 또는 점수(scoring system)로 나타낸 것이므로 위험자산 증권들의 선택에 있어 우선순위(ranking)를 정하는 기준이 된다. 이를테면 투자자들의 효용은 기대수익이 높을수록 증가하고 위험이 높을수록 감소하므로 다음과 같은 효용함수로 표시할 수 있게 되는데, 이 효용함수의 수치는 투자자들이 감지하는 위험회피의 정도를 반영한 것이므로 확실한 투자자산(무위험자산)으로부터 얻게 되는 투자수익, 즉 확실성등가(certainty equivalent)가 된다. 따라서 이 확실성등가를 이용하여 선택의 우선순위를 쉽게 결정할 수 있다.

$$U = E(R) - 0.5C \cdot \sigma^2 \qquad (2\text{-}5)$$

단, U : 효용의 크기　C : 위험회피계수

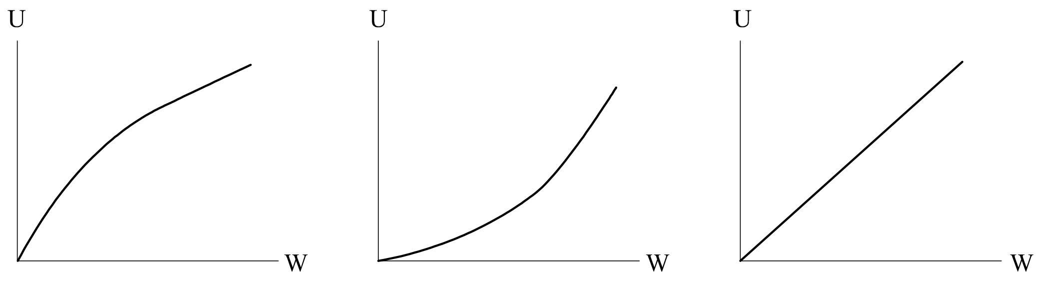
예를 들어 위험회피계수가 2(C=2)인 투자자가 있다면 다음처럼 효용 즉, 확실성등가를 계산하여 우선순위를 정하게 된다.

주　식 X : $E(R) = 0.10$　$\sigma^2 = 0.040$　$U = 0.1 - 0.5(2)(0.04) = 0.060$

주　식 P : $E(R) = 0.06$　$\sigma^2 = 0.028$　U = 0.06 − 0.5(2)(0.028) = 0.032
국공채 B : $E(R) = 0.04$　$\sigma^2 = 0.0$　U = 0.04 − 0.5(2)(0) = 0.040

위험에 대한 투자자의 태도는 위험회피형, 위험중립형, 위험선호형 세 가지 유형으로 나누어 생각해 볼 수 있다. 이 세 가지 유형들의 투자자의 효용함수를 투자수익(또는 부)과 효용과의 관계에서 그림으로 나타내면 [그림 4]의 (a), (b), (c)와 같다. 위험회피형의 효용함수는 원점에 대하여 오목한 형태(concave)를 보이면서 투자수익의 증가가 있을 때 체감하는 모양을 보이게 된다. 반면에 위험선호형은 원점에 대해서 볼록한 형태(convex)를 보이면서 투자수익의 증가가 있을 때 체증하는 모양을 보이게 된다. 그리고 위험중립형의 효용함수는 직선형으로 표시된다.

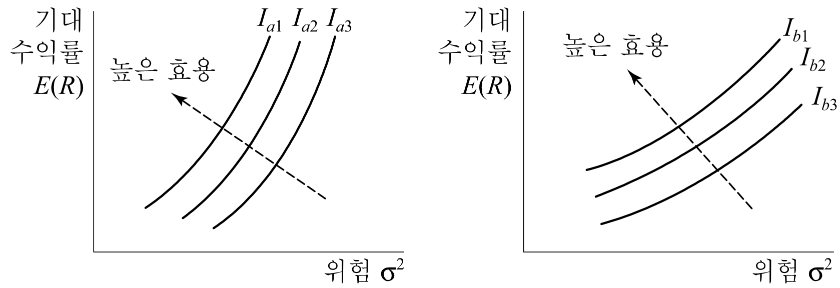
[그림 4]　투자자의 유형에 따른 효용함수의 형태



(a) 위험회피형　(b) 위험선호형　(c) 위험중립형

투자자의 효용함수는 [그림 4]와 같이 투자수익과 효용공간에 직접 표시할 수도 있지만, 평균-분산 기준에 의하여 투자를 결정하는 포트폴리오 선택 체계에 따라 기대수익률(평균)과 표준편차의 공간에 효용함수를 표시하는 것이 최적포트폴리오의 선택과정을 파악하기에 훨씬 용이하다. [그림 5]는 평균과 표준편차의 공간에 위험회피형의 효용함수를 나타낸 것이다. 이를 무차별효용곡선(indifferent utility curve)이라고 하는데, 이는 특정투자자에게 동일한 효용을 가져다주는 기대수익과 표준편차(위험)의 조합을 연결한 곡선이다.

[그림 5] 위험회피형 투자자의 무차별효용곡선



(a) 보수적 투자자　　(b) 공격적 투자자

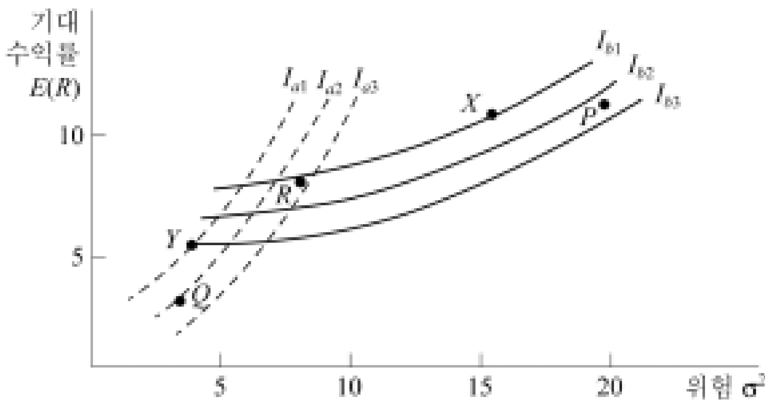
[그림 5]는 또한 투자론에서 가정하고 있는 이성적 투자자들의 효용곡선을 나타낸 것이기도 하다. 왜냐하면 자기가 부담하는 위험이상의 투자수익의 증가가 있지 않으면 전과 동일한 만족을 느끼지 못하는 것이 이성적 투자자이기 때문이다. 그러나 위험회피형의 투자자라도 위험회피도, 즉 위험의 증가에 따라 보상을 바라는 정도에는 서로 차이가 있으므로 개인에 따라 무차별효용곡선의 모양은 달라지게 된다. (a)처럼 기울기가 가파른 경우는 위험을 회피하는 보수적인 투자자의 예로서 일정한 위험증가가 있을 때 보다 많은 기대수익증가를 요구한다. 반면 (b)처럼 기울기가 덜 가파른 경우는 공격적인 투자자의 예로서 기대수익의 증가가 위험증가에 못 미치더라도 만족한다.

(3) 최적증권의 선택

투자대상의 증권들이 일차적으로 지배원리에 의해서 효율적 증권으로 선별되면 이들 중에서 최종적으로 어느 증권을 선택할 것인가의 문제는 효용이 가장

큰 무차별효용곡선과 만나는 증권을 찾으면 해결된다. 이러한 증권을 최적증권, 최적포트폴리오(optimal portfolio)라고 한다. [그림 6]은 [그림 3]과 [그림 5]를 결합시켜 작성된 것인데, 방어적 투자자는 주식 Y를 택하고, 공격적 투자자는 주식 X를 택함으로써 만족을 극대화시킨다. 결론적으로 투자대상들의 선택과정은 먼저 지배원리를 충족하는 효율적 증권을 선택한 다음, 이 중에서는 투자자의 효용곡선(위험선호도)에 적합한 최적증권을 선택하는 것으로 요약할 수 있다.

[그림 6] 최적증권의 선택



3. 포트폴리오의 기대수익과 위험

투자대상의 최적 선택방법은 둘 이상의 증권으로 구성되는 포트폴리오의 최적 선택에도 그대로 적용된다. 개별증권의 경우와 마찬가지로 포트폴리오의 확률분포로부터 기대수익률과 분산을 추정하여 효율적 포트폴리오(efficient portfolio)와 최적포트폴리오(optimal portfolio)를 결정하면 된다. 그런데 문제는 포트폴리오 수익률의 확률분포는 이를 구성하고 있는 개별증권 확률분포의 단순한 합으로 나타나지 않는다는 점에 있다.

가. 포트폴리오 기대수익률

포트폴리오 기대수익률을 측정하는 방법에는 두 가지가 있다. 하나는 포트폴리오 수익률의 확률분포로부터 직접 기대치를 구하는 방법으로 개별증권의 경우와 마찬가지로 식(2-6)과 같이 표시된다(개별증권의 기대수익률을 구하는 식(2-1)과 비교해 보라).

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{m} p_i r_{p_i} \tag{2-6}$$

단, $E(R)$: 포트폴리오의 기대수익률
p_i : 상황 i가 발생할 확률(일어날 상황은 m가지)
r_{pi} : 상황 i가 발생할 때의 포트폴리오 예상수익률

포트폴리오 기대수익률을 구하는 또 다른 방법은 식(2-7)처럼 개별증권의 기대수익률을 투자금액의 비율로 가중평균하여 구하는 것이다.

$$E(R_P) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot E(R_j) \tag{2-7}$$

단, w_j : 개별증권 j에 대한 투자비율
$E(R_j)$: 개별증권 j에 대한 기대수익률

따라서 주식 X와 주식 Y로 구성되는 포트폴리오 기대수익률은 다음과 같이 측정된다.

$$E(R_P) = w_X \cdot E(R_X) \; + \; w_Y \cdot E(R_Y)$$

포트폴리오 가중치(w)는 원래의 자기자본 투자액(equity investment) 대비 각 투자금액에 대한 비율을 의미하며, 가중치의 합은 1이다. 여기서 가중치는 양수는 물

론 음수도 될 수 있다. 양의 가중치는 증권을 매입하는 경우(long position)를 의미하며, 음의 가중치는 증권을 공매(short sale)하는 경우(short position)를 의미한다. 공매란 제3자로부터 증권을 빌린 후 일정기간이 경과한 후에 동일한 수량의 증권으로 되갚는 것을 말한다. 이 과정에서 빌린 증권을 시장에서 매각한 후 나중에 재매입할 때 증권가격이 하락하면 그 차이만큼 이익을 얻게 된다. 예를 들면 어떤 투자자가 1,000만원을 가지고 있다고 하자. 이 투자자는 증권 B를 공매하여 얻은 600만원을 합쳐서 1,600만원을 증권 A에 투자하였을 경우 각 증권에 대한 가중치는 다음과 같다.

w_A=1,600만/1,000만=1.6

w_B=-600만/1,000만=-0.6

이제 증권 A의 기대수익률은 20%, 증권 B의 기대수익률은 10%라고 하면, 이 증권 A와 B로 이루어지는 포트폴리오의 기대수익률은 다음과 같이 계산된다.

$$E(R_P) = (1.6)(0.2) + (-0.6)(0.1) = 0.26$$

나. 포트폴리오 위험(분산)

포트폴리오 위험을 측정하는 포트폴리오 분산(portfolio's variance)은 본래 분산을 구하는 방법대로 각 상황에서 얻게 되는 포트폴리오의 발생 가능한 수익률(r_{pi})과 포트폴리오 기대수익률로부터의 편차의 제곱에 발생할 확률(p_i)을 곱하여 그 합을 구하여 얻어진다. 그러나 그 결과는 포트폴리오 기대수익률처럼 단순히 개별증권의 분산을 가중 평균을 한 것이 아니다.

$$Var(R_P) = \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{m}[r_{Pi} - E(R_P)]^2 \cdot p_i \tag{2-8}$$

단, $Var(R_p) = \sigma^2{}_P$: 포트폴리오 분산
r_{Pi} : 상황 i에서의 포트폴리오 예상수익률
$E(R_p)$: 포트폴리오 기대수익률
p_i : 상황 i가 발생할 확률

[예 제]

<표 1>에서 예로 든 주식 X, Y, Z에 대하여 다음과 같이 투자금액을 달리하여 포트폴리오를 구성하고자 한다. 포트폴리오의 기대수익률과 위험을 구하라.

① 주식 X(50%)와 주식 Y(50%)로 포트폴리오를 구성하는 경우
② 주식 X(50%)와 주식 Z(50%)로 포트폴리오를 구성하는 경우
③ 주식 X(20%)와 주식 Z(80%)로 포트폴리오를 구성하는 경우

• 기대수익률

① 주식 X(50%)와 주식 Y(50%)로 구성되는 포트폴리오의 기대수익률

i) $E(R_p) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot r_{pi}$

$r_{pi} = w_x \cdot r_{xi} + w_y \cdot r_{yi}$

$i=$불황 : $r_{pi} = (0.5\times -0.10) + (0.5\times 0.00) = -0.05$

$i=$정상 : $r_{pi} = (0.5\times 0.10) + (0.5\times 0.05) = 0.075$

$i=$호황 : $r_{pi} = (0.5\times 0.30) + (0.5\times 0.10) = 0.20$

$E(R_p) = (-0.05\times 0.25) + (0.075\times 0.5) + (0.20\times 0.25) = 7.5\%$

ii) $E(R_p) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot E(R_j)$

$= w_X \cdot E(R_X) + w_Y \cdot E(R_Y)$

$= (0.5\times 0.10) + (0.5\times 0.05) = 7.5\%$

② 주식 X(50%)와 주식 Z(50%)로 구성되는 포트폴리오의 기대수익률

$$E(R_p) = w_X \cdot E(R_X) + w_Z \cdot E(R_Z)$$

$$= (0.5 \times 0.10) + (0.5 \times 0.05) = 7.5\%$$

③ 주식 X(20%)와 주식 Z(80%)로 구성되는 포트폴리오의 기대수익률

$$E(R_p) = (0.2 \times 0.10) + (0.8 \times 0.05) = 6.0\%$$

• 위 험

① 주식 X(50%)와 주식 Y(50%)로 구성된 포트폴리오의 분산

$$\sigma_p^2 = (-0.05 - 0.075)^2 0.25 + (0.075 - 0.075)^2 0.50$$

$$+ (0.20 - 0.075)^2 0.25 = 0.0078125$$

$$\therefore \ \sigma_p = \sqrt{0.0078125} = 0.0884 = 8.84\%$$

② 주식 X(50%)와 주식 Z(50%)로 구성된 포트폴리오의 분산

$$\sigma_p^2 = (0.00 - 0.075)^2 0.25 + (0.075 - 0.075)^2 0.50$$

$$+ (0.15 - 0.075)^2 0.25 = 0.0028125$$

$$\therefore \ \sigma_p = \sqrt{0.0028125} = 0.0530 = 5.30\%$$

③ 주식 X(20%)와 주식 Z(80%)로 구성된 포트폴리오의 분산

$$\sigma_p^2 = (0.06 - 0.06)^2 0.25 + (0.06 - 0.06)^2 0.50 + (0.06 - 0.06)^2 0.25$$

$$= 0.0$$

$$\therefore \ \sigma_p = \sqrt{0.0} = 0.0\%$$

위의 예제에서 볼 수 있듯이 포트폴리오(X+Z)와 포트폴리오(X+Y)의 기대수익률은 7.5%로 동일하다. 그러나 위험(분산)을 비교하여 보면 포트폴리오(X+Z)가 포트

폴리오(X+Y)보다 더 효율적 포트폴리오임을 알 수 있다. 이러한 위험감소현상은 각 주식간의 상관관계에서 비롯된다. 주식 X와 Y가 결합될 때는 두 주식의 수익률이 같은 방향으로 움직이므로 이 수익률의 변동성은 그대로 남게 되는 반면, 주식 X와 Z가 결합될 때는 두 주식의 수익률이 움직이는 방향이 반대가 되므로 개별주식이 보유하고 있는 위험은 서로 상쇄되어 버린다. 일반적으로 상관관계(correlation)가 적거나 負의 관계에 있는 주식들로 포트폴리오를 구성하면 현격한 위험저감효과를 누릴 수 있다. 위의 예제에서 위험저감효과를 가져오는 또 다른 요인은 투자금액의 비율임을 알 수 있다. 동일 주식 X와 Z로 포트폴리오를 구성할 때 투자금액의 비율이 20:80인 경우에는 50:50인 경우와 비교하여 볼 때 위험이 현격히 줄어들어 마치 정기예금하는 것처럼 위험이 전혀 없는 투자성과를 기대할 수 있게 된다. 이제 변동성을 측정하는 포트폴리오의 분산(주식 X와 Y로 구성된 포트폴리오)을 구하는 공식을 도출하면 다음과 같다.

$$Var(R_p) = E[R_p - E(R_p)]^2 \tag{2-9}$$

$$= E[w_X r_X + w_Y r_Y - w_X E(r_X) - w_Y E(r_Y)]^2$$

$$= E[w_X(r_X - E(r_X)) + w_Y(r_Y - E(r_Y))]^2$$

$$= E[w_X^2(r_X - E(r_X))^2 + w_Y^2(r_Y - E(r_Y))^2 + 2w_X w_Y(r_X - E(r_X))(r_Y - E(r_Y))]$$

$$= w_X^2\sigma_X^2 + w_Y^2\sigma_Y^2 + 2w_X w_Y \cdot Cov(r_X, r_Y)$$

단, w_X : 주식 X에 대한 투자비율
w_Y : 주식 Y에 대한 투자비율
${\sigma^2}_X$: 주식 X의 분산
${\sigma^2}_Y$: 주식 Y의 분산

또는 공분산의 정리를 적용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$
\begin{aligned}
Var(R_p) &= Cov(R_p, R_p) \\
&= Cov(w_X r_X + w_Y r_Y,\ w_X r_X + w_Y r_Y) \\
&= w_X^2 Cov(r_X, r_X) + w_Y^2 Cov(r_Y, r_Y) + 2w_X w_Y \cdot Cov(r_X, r_Y) \\
&= w_X^2 \sigma_X^2 + w_Y^2 \sigma_Y^2 + 2w_X w_Y \cdot Cov(r_X, r_Y)
\end{aligned}
$$

위의 식에서 포트폴리오의 위험(분산)은 ① 개별주식의 위험(σ^2_X, σ^2_Y), ② 각 주식에 대한 투자금액의 비율(w_X, w_Y), ③ 구성주식간의 공분산($Cov(r_X, r_Y)$)에 의해서 결정됨을 알 수 있다. 이 중에서 특히 중요한 것은 공분산(covariance)인데 공분산은 식(2-10)과 같이 정의된다.

$$Cov(r_X, r_Y) = \sigma_{XY} = E[(r_X - E(R_X))(r_Y - E(R_Y))] \tag{2-10}$$

증권들 간의 공분산은 수익률이 변동할 때 같은 방향으로 움직이는지 반대 방향으로 움직이는지를 측정한다. 만약 수익률의 움직임이 같은 방향이면 正(+)의 값을 지니고, 반대 방향이면 負(−)의 값을 갖게 된다. 증권들 간의 수익률의 움직임을 공분산으로 측정하면 구해지는 값의 범위가 무한하지만, 상관계수(correlation coefficient)는 공분산을 각각의 표준편차의 곱으로 나누어 표준화시킨 것으로 $-1 \le \rho_{xy} \le +1$의 값을 취하게 되며 움직임의 정도를 나타낸다. $\rho_{xy} = +1$인 경우를 완전 正(+)의 상관관계, $\rho_{xy} = -1$인 경우를 완전 負(−)의 상관관계를 갖는다고 말하며 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(r_X, r_Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \tag{2-11}$$

단, ρ_{xy} : 증권 X와 Y사이의 상관계수
$Cov(r_X, r_Y)$: 증권 X와 Y사이의 공분산
σ_X : 증권 X의 표준편차
σ_Y : 증권 Y의 표준편차

상관계수를 사용하면 포트폴리오 위험(분산)을 다음 식(2-12)와 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$Var(R_p) = \sigma_p^2 = w_X^2\sigma_X^2 + w_Y^2\sigma_Y^2 + 2w_X \cdot w_Y \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \rho_{XY} \qquad (2\text{-}12)$$

[예 제]

<표 1>에서 예로 든 주식 X, Y, Z 포트폴리오를 구성하고자 한다. ① 주식 X와 Y, 주식 X와 Z간의 공분산 ② 이들의 상관계수를 구하라. 또한 ③ 식(2-12)에 의해서 W_X=0.5, W_Y=0.5 및 W_X=0.5, W_Z=0.5로 각각 구성되는 포트폴리오 위험을 측정하고 식(2-8)에 의한 결과와 비교하라.

㉠ 주식 X와 Y, 주식 X와 Z간의 공분산

$$\begin{aligned} Cov(r_X, r_Y) = \sigma_{XY} &= 0.25(-0.10-0.10)(0.00-0.05) \\ &+0.5(0.10-0.10)(0.05-0.05) \\ &+0.25(0.30-0.10)(0.10-0.05) = 0.005 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(r_X, r_Z) = \sigma_{XZ} &= 0.25(-0.10-0.10(0.10-0.05) \\ &+0.5(0.10-0.10)(0.05-0.05) \\ &+0.25(0.30-0.10)(0.00-0.05) = -0.005 \end{aligned}$$

㉡ 주식 X와 Y, 주식 X와 Z간의 상관계수

$$\rho_{XY} = \frac{0.005}{(0.1414)(0.0354)} = +1$$

$$\rho_{XZ} = \frac{-0.005}{(0.1414)(0.0354)} = -1$$

㉢ 주식 X(50%)와 주식 Y(50%) 포트폴리오 분산과 표준편차

$$\sigma_p^2 = (0.5)^2(0.1414)^2 + (0.5)^2(0.0354)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.1414)(0.0354)(1)$$

$$= 0.0078118$$

$$\therefore\ \sigma_p = \sqrt{0.0078118} = 8.84\%$$

주식 X(50%)와 주식 Z(50%) 포트폴리오 분산과 표준편차

$$\sigma_p^2 = (0.5)^2(0.1414)^2 + (0.5)^2(0.0354)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.1414)(0.0354)(-1)$$

$$= 0.0028118$$

$$\therefore\ \sigma_p = \sqrt{0.0028118} = 5.30\%$$

4. 효율적 포트폴리오

포트폴리오의 기대수익률과 분산이 측정되면, 일정한 위험 하에서 기대수익을 최대화시키거나, 일정한 기대수익 하에서 위험을 최소화시키는 효율적 포트폴리오를 찾아야 한다.

가. 두 종목 포트폴리오의 결합선

두개의 증권으로 구성되는 포트폴리오의 위험은 구성증권 간의 상관관계(ρ_{XY})와

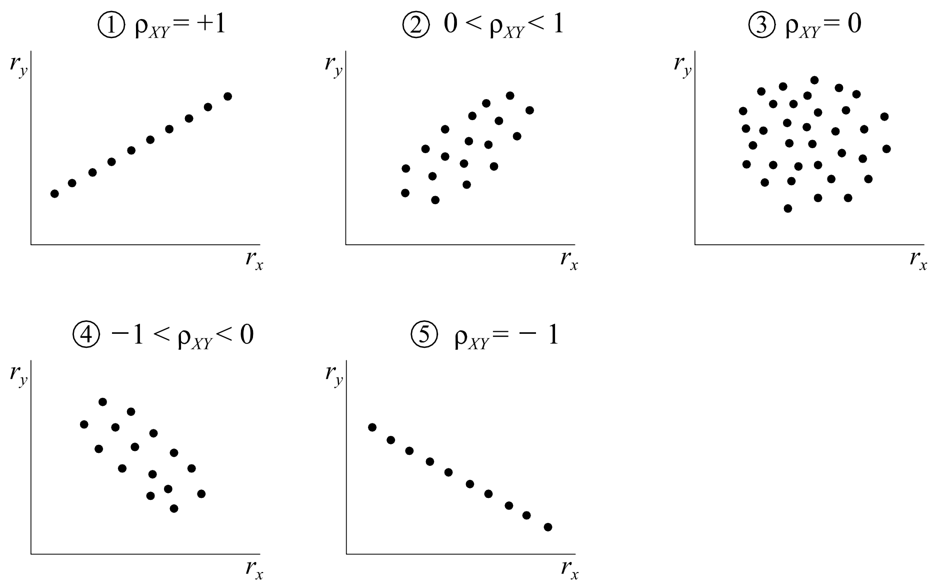
각 증권에 대한 투자비율(w)의 조정 여하에 따라서 달라진다.

$$Var(R_p) = w_X^2\sigma_X^2 + w_Y^2\sigma_Y^2 + 2\,w_X \cdot w_Y \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \rho_{XY} \tag{2-13}$$

(1) 상관관계와 포트폴리오 위험

두 증권 수익률의 상관성 정도에 따라 [그림 7]과 같은 몇 가지 형태의 상관관계를 상정하여 볼 수 있다.

[그림 7] 구성증권간의 상관관계



①의 경우는 완전 정의 상관관계(ρ_{XY} = +1)를 나타내는 것으로서 어느 한 증권(X)의 수익률이 변동할 때 다른 증권(Y)의 수익률이 항상 일정하게 비례적으로 변동하는 직선적인 관계이다. ②의 경우는 정의 상관관계(0< ρ_{XY}

<+1)이나, 양자가 정확하게 직선적인 관계가 아닌 경우이다. ③의 경우(ρ_{XY} = 0)는 아무런 상관성이 없는 경우이다. ④의 경우(−1< ρ_{XY} <0)는 부의 상관관계를 가지나 양자가 정확한 반비례적인 관계가 아닌 경우이다. ⑤의 경우(ρ_{XY} = −1)는 정확히 반비례적으로 완전 부의 상관관계를 나타낸 것이다.

① 상관관계가 완전 정(+)일 경우

식(2-13)에서 ρ_{XY} = +1일 경우이므로 포트폴리오위험은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= (w_X\sigma_X + w_Y\sigma_Y)^2 \\ \therefore\ \sigma_P &= w_X\sigma_X + w_Y\sigma_Y \end{aligned} \qquad (2\text{-}14)$$

즉, 포트폴리오위험(표준편차)은 개별증권의 표준편차를 투자비율에 따라서 가중평균한 것이 되어 투자위험은 감소되지 않는다.

② 상관관계가 완전 부(−)일 경우

ρXY = −1일 경우의 포트폴리오위험은 식(2-13)으로부터 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= (w_X\sigma_X - w_Y\sigma_Y)^2 \\ \therefore \sigma_p &= |\ w_X\sigma_X - w_Y\sigma_Y\ | \end{aligned} \qquad (2\text{-}15)$$

어느 증권이 타 증권과의 상관관계가 완전 부의 관계에 있으면 포트폴리오 분산을 영으로 만듦으로써 완전 헷지(perfect hedge)의 역할도 할 수 있게 된다.

③ 상관관계가 영(0)일 경우

ρ_{XY} = 0일 경우는 식(2-13)에서 2 · w_X · w_Y · σ_X · σ_Y · ρ_{XY} 부분이 없어지므로 다음과 같이 위험이 줄어들게 된다.

$$Var(R_P) = w_X^2\sigma_X^2 + w_Y^2\sigma_Y^2$$
$$\therefore \sigma_P = \sqrt{w^2{}_X\,\sigma^2{}_X + w^2{}_Y\,\sigma^2{}_Y} \qquad (2\text{-}16)$$

여기서 확인할 수 있는 것처럼 포트폴리오를 구성하는 개별자산간의 상관관계가 완전 정의 관계에 있지 않으면 분산투자를 통하여 투자위험을 줄일 수 있게 된다. 따라서 포트폴리오에 포함되는 개별자산의 위험은 개별자산 자체의 위험(분산)보다는 다른 자산과의 상관관계에 비추어 평가되어야 한다.

(2) 투자비율과 포트폴리오 위험

포트폴리오 위험의 감소는 상관관계가 적은 증권들 간의 결합을 통해서도 가능하지만, 투자자금의 비율을 적절히 변경함에 의해서도 가능하다. 증권 간의 상관관계가 주어졌을 때 투자비율이 달라짐에 따라 포트폴리오의 위험이 변하는 것을 <표 1>의 주식 X와 Y, 그리고 주식 X와 Z로 구성된 포트폴리오를 통하여 알아보자. 상관계수 ρ_{XY}=+1(공분산은 0.005)인 관계에 있는 주식 X와 Y에 대한 투자비율을 조정할 경우의 포트폴리오의 기대수익률과 표준편차는 <표 5>의 ② 란과 같이 계산된다.

〈표 5〉 포트폴리오의 기대수익률과 위험 : 투자비율을 조정할 때

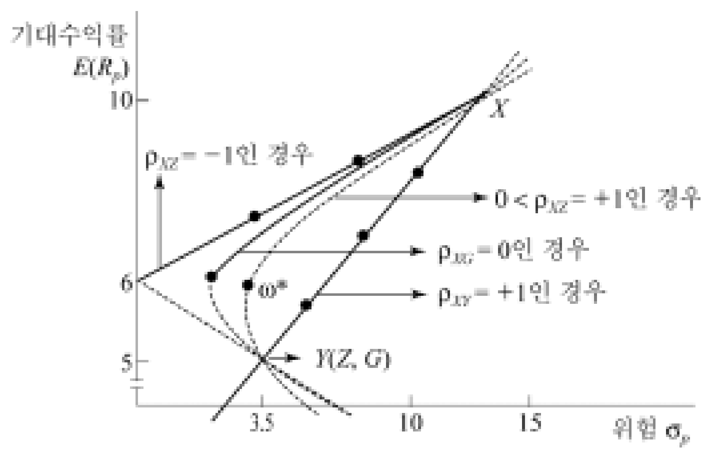
①투자금액의 비율		② $\rho_{XY}=+1$일 때		③ $\rho_{XZ}=-1$일 때		④ $\rho_{XG}=0$일 때	
w_X	w_Y	$E(R_p)$	σ_p	$E(R_p)$	σ_p	$E(R_p)$	σ_p
100%	0%	10.0%	14.1%	10.0%	14.1%	10.0%	14.1%
80	20	9.0	12.0	9.0	10.6	9.0	11.3
50	50	7.5	8.8	7.5	5.3	7.5	7.3
20	80	6.0	5.7	6.0	0.0	6.0	4.0
0	100	5.0	3.5	5.0	3.5	5.0	3.5
−20	120	4.0	1.4	4.0	7.0	4.0	5.1

투자비율이 변하는데 따라 포트폴리오 기대수익률과 위험이 동시에 비례적으로 일정하게 변하여 분산투자의 효과가 전혀 나타나지 않음을 관찰할 수 있다. 한편, 상관계수 $\rho_{XY}=-1$ (공분산은 -0.005)의 관계에 있는 주식 X와 Z로 포트폴리오를 구성하게 되면 기대수익률과 위험은 <표 5>의 ③란과 같이 계산된다. 여기서 특기할 만한 점은 X에 20%, Z에 80% 투자하여 얻게 되는 포트폴리오의 위험(σ_P)은 영이 된다는 점이다. 어떤 상황이 벌어지든 항상 기대수익률은 6%이면서 수익률의 변동성은 없게 되어 분산투자의 효과가 가장 잘 나타난다. 이처럼 투자비율을 적절히 조정하여 포트폴리오를 구성하면 불확실성을 줄이거나 제거하는 투자전략이 가능하다. 끝으로 주식 X와 상관관계가 영인 주식 G로 포트폴리오를 구성하게 되면 투자비율에 따라 달라지는 포트폴리오의 기대수익률과 위험은 ④란과 같이 계산된다. 여기서도 투자위험이 크게 줄어드는 것을 볼 수 있다.

(3) 포트폴리오 결합선과 최소분산 포트폴리오

포트폴리오를 구성하는 증권간의 상관관계가 일정하게 주어졌을 때 투자비율의 조정에 따른 포트폴리오 기대수익률과 위험(표준편차)의 변화를 그림으로 나타낸 것이 포트폴리오 결합선(combination line)이다.

[그림 8] 포트폴리오 결합선



주식 X와 Y로 포트폴리오가 구성될 때(ρ_{XY}=+1인 경우)는 <그림 8>에서 보는 것처럼 투자비율이 X에서 Y로 많아지면서 기대수익률과 위험이 선형적으로 줄게 된다. 반면에 주식 X와 Z로 포트폴리오가 구성되면(ρ_{XY}=−1인 경우) 양자($E(R_P)$와 σ_P)의 관계가 선형적으로 감소하다가 투자비율이 X : Z = 20 : 80일 때 최소(σ_P)가 된 다음 다시 포트폴리오 위험은 커진다. 일반적으로 자본시장에서 거래되는 증권들 간의 상관관계는 대부분 −1과 +1 사이, 즉 −1 ≤ ρ_{XY} ≤+1인데, 이와 같은 경우는 호 XY처럼 표시된다. 투자비율이 달라질 때 기대수익률과 위험이 이제는 선형적으로 변화하지 않고 비선형의 관계로 변화하게 되는데, w^*되는 점에서 위험이 최소가 된다. 투자비율이 이 w^*수준을 넘어서 Y로 접근하면 기대수익률은 감소하면서 위험은 오히려 증가하게 된다. 이처럼 포트폴리오 결합선에서 위험이 최소가 되는 포트폴리오를 최소분산 포트폴리오(GMVP : global minimum variance portfolio)라고 한다. 주식 X와 Y 두 주식으로 이루어지는 포트폴리오 중에서 최소분산 포트폴리오는 다음 식(2-17)에 의해서 구해진다.

$$w_X^* = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}} = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}} \tag{2-17}$$

식(2-17)은 식(2-13)에서 w_Y를 $1-w_X$로 바꾼 후 w_X에 관하여 미분한 값을 영으로 놓고 풀면 얻어진다.

[예 제]

주식 X와 Y의 미래수익률에 관한 자료가 다음과 같이 구해졌다.

㉠ 개별주식 X와 Y에 대해서, 각각의 기대수익률과 위험(분산)을 구하라.

㉡ 두 주식 간의 공분산, 상관계수를 구하라.

㉢ X에 대한 투자금액의 비율이 100%, 75%, 50%, 25%, 0%, −25%로 조정될 때 포트폴리오 결합선을 구하라.

㉣ 투자위험이 최소가 되는 최소분산 포트폴리오를 구하라.

상 황	확 률 (P_i)	주 식 $X(r_X)$	주 식 $Y(r_Y)$
Ⅰ	0.2	9%	15%
Ⅱ	0.2	7	20
Ⅲ	0.2	11	-3
Ⅳ	0.2	-2	6
Ⅴ	0.2	25	2

㉠ 주식 X와 Y의 기대수익률과 분산(표준편차)

$$E(R_X)=\sum_{j=1}^{5} r_{Xi}\cdot p_i=10\%$$

$$E(R_Y)=\sum_{j=1}^{5} r_{Yi}\cdot p_i=8\%$$

$$\sigma_X^2=E[r_X-E(R_X)]^2=0.0076 \quad \therefore\ \sigma_X=8.72\%$$

$$\sigma_Y^2=E[r_Y-E(R_Y)]^2=0.00708 \quad \therefore\ \sigma_Y=8.41\%$$

㉡ 주식 X, Y간의 공분산, 상관계수

$$Cov(r_X, r_Y)=\sigma_{XY}=E[r_X-E(R_X))(r_Y-E(R_Y))]=-0.0024$$

$$\rho_{XY}=\sigma_{XY}/\sigma_X\cdot\sigma_Y=-0.0024/(0.0872)(0.0841)=-0.33$$

㉢ 투자비율이 달라질 때의 포트폴리오의 결합선

$\sigma_{XY}=-0.0024$ 혹은 $\rho_{XY}=-0.33$ 이므로 이를 $E(R_p)$와 $\sigma(R_p)$를 구하는 다음 식에 대입하면 아래와 같이 구해진다.

$$E(R_p)=w_X\cdot E(R_X)+w_Y\cdot E(R_Y)$$

$$\sigma_p^2=w_X^2\sigma_X^2+w_Y^2\sigma_Y^2+2w_X\cdot w_Y\cdot\sigma_{XY}$$

주식 X에 대한 투자비율 (w_X)	주식 Y에 대한 투자비율 (w_Y)	포트폴리오기대 수익률 $E(R_p)$	포트폴리오위험 σ_p
100%	0%	10.0%	8.72%
75	25	9.5	6.18
50	50	9.0	4.97
25	75	8.5	5.96
0	100	8.0	8.41
-25	125	7.5	11.42

㉣ 최소분산 포트폴리오

$$w_X{}^* = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}} = \frac{0.00708-(-0.0024)}{0.0076+0.00708-2(-0.0024)} = 0.487$$

주식 X에 48.7%, 주식 Y에 51.3% 투자할 경우의 포트폴리오 기대수익률과 위험은

$E(R_p) = 8.974\%$ $\sigma_p^2 = 24.66\%$ $\sigma_p = 4.960\%$

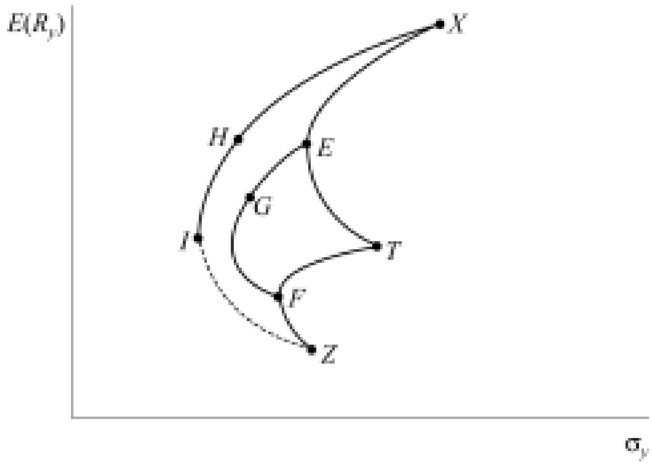
나. n 종목으로 구성되는 효율적 포트폴리오

(1) n 종목 포트폴리오의 결합선

결합되는 증권의 수가 다수인 경우에도, 기본적으로 두 개의 증권의 결합관계로 생각해 볼 수 있다. 이 원리를 [그림 9]의 세 증권 X, Z, T의 결합관계를 예로 들어 살펴보기로 하자. 먼저 증권 X와 T를 결합시키면 그 투자비율의 변화에 따라 두 개 종목으로 포트폴리오 결합선은 곡선 XET를 따라 나타날 것이다. 또 증권 T와 Z 두 증권을 결합하면 투자비율의 변화에 따라 곡선 TFZ의 포트폴리오 결합선을 얻는다. 한편 X와 T의 결합 중에서 포트폴리오 E 그리고 T와 Z의 결합 중 포트폴리오 F를 결합시키면 새로운 포트폴리오 결합선 EGF를 얻는다. 곡선 EGF선상의 포트폴리오는 E와 F를 결합한 것이므로 결국 개별증권 X, T, Z 세 증권을 모두 결합한 셈이 된다. 이와 같은 원리로 X, T, Z를 동시에 결합시키면 궁극적으로 곡선 XHIZ의 포트폴리오 결합선을 얻을 수 있다. 곡선 XHIZ선상의 포트폴리오는 증권 X, T, Z를 결합할 때 얻을 수 있는 포트폴리오 중에서는 일정한 기대수익률 하에서 위험이 가장 적은 포트폴리오 집합이 된다. 이처럼 일정한 기대수익률 하에서 위험이 가장 적은 포트폴리오 집합을 최소분산 포트폴리오 집합(minimum variance portfolio)이라고 부른다. 그러나 이 최소

분산 포트폴리오 집합(곡선XHIZ) 중에서 곡선 XHI부분만이 일정한 위험(표준편차)에서 기대수익률이 보다 높기 때문에 이 부분을 효율적 포트폴리오 집합(efficient portfolio set) 또는 효율적 투자선(efficient frontier)이라고 부른다. 이 중 포트폴리오 I는 최소분산 포트폴리오(global minimum variance portfolio)가 된다.

[그림 9] 다수의 증권을 결합시킬 때의 포트폴리오 결합선과 최소분산 포트폴리오



(2) n 종목 포트폴리오의 위험측정

n개의 종목으로 구성되는 효율적 투자선을 찾을 수 있기 위해서는 n개의 종목으로 구성되는 포트폴리오 위험의 계량적 측정이 필요하다. 먼저 세 개의 주식(주식 1, 2, 3)으로 구성되는 포트폴리오의 기대수익률과 위험(분산)은 다음과 같이 나타나며 이 관계식을 공분산 메트릭스로 표시하면 <표 6>과 같다.

〈표 6〉 3개의 주식으로 구성된 포트폴리오 위험 계산(공분산 메트릭스)

	ω_1 주식 1	ω_2 주식 2	ω_3 주식 3
ω_1 주식1	① $\omega_1\omega_1\sigma_{11} = \omega_1^2\sigma_1^2$	② $\omega_2\omega_1\sigma_{21}$	③ $\omega_3\omega_1\sigma_{31}$
ω_2 주식 2	④ $\omega_1\omega_2\sigma_{12}$	⑤ $\omega_2\omega_2\sigma_{22} = \omega_2^2\sigma_2^2$	⑥ $\omega_3\omega_2\sigma_{32}$
ω_3 주식 3	⑦ $\omega_1\omega_3\sigma_{13}$	⑧ $\omega_2\omega_3\sigma_{23}$	⑨ $\omega_3\omega_3\sigma_{33} = \omega_3^2\sigma_3^2$

$$E(R_p) = w_1E(R_1) + w_2E(R_2) + w_3E(R_3)$$

$$Var(R_p) = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2(w_1w_2\sigma_{12} + w_1w_3\sigma_{13} + w_2w_3\sigma_{23}) \quad (2\text{-}18)$$

위의 식을 확장하여 n개의 증권으로 구성되는 포트폴리오의 분산을 공분산 메트릭스로 나타내면 다음의 <표 7>과 같다.

〈표 7〉 n종목 포트폴리오의 위험 : 공분산 메트릭스

주식 i / 주식 j	1	2	3	4	....	n
1	$\omega_1^2\sigma_1^2$	$\omega_2\omega_1\sigma_{21}$	$\omega_3\omega_1\sigma_{31}$	$\omega_4\omega_1\sigma_{41}$	....	$\omega_n\omega_1\sigma_{n1}$
2	$\omega_1\omega_2\sigma_{12}$	$\omega_2^2\sigma_2^2$	$\omega_3\omega_2\sigma_{32}$	$\omega_4\omega_2\sigma_{42}$	....	$\omega_n\omega_2\sigma_{n2}$
3	$\omega_1\omega_3\sigma_{13}$	$\omega_2\omega_3\sigma_{23}$	$\omega_3^2\sigma_3^2$	$\omega_4\omega_3\sigma_{43}$	....	$\omega_n\omega_3\sigma_{n3}$
4	$\omega_1\omega_4\sigma_{14}$	$\omega_2\omega_4\sigma_{24}$	$\omega_3\omega_4\sigma_{34}$	$\omega_4^2\sigma_4^2$	....	$\omega_n\omega_4\sigma_{n4}$
|	|	|	|	|	....	|
n	$\omega_1\omega_n\sigma_{1n}$	$\omega_2\omega_n\sigma_{2n}$	$\omega_3\omega_n\sigma_{3n}$	$\omega_4\omega_n\sigma_{4n}$	....	$\omega_n^2\sigma_n^2$

ω_j : 주식 j에 대한 투자비율 σ_{ij} : 주식 i와 주식 j 수익률 간의 공분산

ρ_{ij} : 주식 i와 주식 j의 상관계수 σ_i : 주식 i 수익률의 표준편차

σ_j : 주식 j 수익률의 표준편차

$$
\begin{aligned}
Var(R_P) = {} & w_1 w_1 \sigma_{11} + w_2 w_2 \sigma_{22} + w_3 w_3 \sigma_{33} + \cdots\cdots + w_n w_n \sigma_{nn} \\
& + (w_1 w_2 \sigma_{12} + w_1 w_3 \sigma_{13} + \cdots + w_1 w_n \sigma_{1n} \\
& + w_2 w_1 \sigma_{21} + w_2 w_3 \sigma_{23} \cdots\cdots)
\end{aligned}
$$

$$Var(R_P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (2\text{-}19)$$

또는, $Var(R_P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$

단, $w_{i,}\ w_j$: 주식 i, j에 대한 투자비율

<표 7>의 모든 칸을 합하면 식(2-19)와 일치한다. <표 7>에서 빗금을 친 대각선(diagonal)상의 칸들은 i=j인 경우로서 동일 종목간의 공분산 ($w_i\ w_j\ \sigma_{ij}$) 즉, 개별증권의 분산($w^2_i \sigma^2_i$)값을 나타낸다. 즉, n종목으로 구성되는 포트폴리오위험 중에서 개별증권의 특성에 의해서 발생되는 위험의 크기를 나타낸다. 이처럼 i=j인 경우의 수는 n개가 된다. 반면에 빗금을 치지 않은 대각선 위와 아래에 있는 칸들은 i≠j인 경우로서 다른 증권과의 공분산을 나타낸 것이다. 이는 포트폴리오위험 중에서 타 종목들과의 상관관계, 즉 시장 전반적인 요인에 의해서 발생되는 위험의 크기를 뜻한다고 할 수 있다. 이처럼 i≠j인 경우의 수는 n(n-1)/2개가 된다. 따라서 식(2-19)는 특정 개별증권의 분산을 표시하는 부분과 타 증권과의 공분산을 나타내는 부분의 합으로 구분하여 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$Var(R_P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2\text{-}20)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \ (\text{단} \ i \neq j)$$

다. 투자종목수와 위험분산효과

포트폴리오위험은 투자종목수가 많을수록 감소하게 된다. 이제 종목 수 증가에 따른 분산투자효과를 분석하기 위해서 n개의 증권에 투자 가능한 금액을 균등하게 배분하여 투자를 한다고 가정하자. 즉, $w_i = w_j = \cdots\cdots = 1/n$이라고 하자. 그러면 포트폴리오분산 $Var\,(R_P)$은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \ (\text{단} \ i \neq j) \quad '''' \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{n})^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{n})(\frac{1}{n}) \sigma_{ij} \ (\text{단} \ i \neq j) \quad (2\text{-}21) \\ &= (\frac{1}{n})^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + (\frac{1}{n})^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \ (\text{단} \ i \neq j) \end{aligned}$$

여기서 개별종목의 분산의 평균을 $\overline{\sigma^2}$, 공분산의 평균을 $\overline{\sigma_{ij}}$ 라고 표시하자. n개 종목으로 포트폴리오가 구성될 때 분산은 n개이고, 공분산은 n(n-1)개이므로 좌변 첫째 항에서 $\sum \sigma_i^2 = \overline{\sigma^2} \times n$이고, 둘째 항에서 $\sum\sum \sigma_{ij} = \overline{\sigma_{ij}} \cdot [n(n-1)]$이 된다. 따라서 위의 식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= (\frac{1}{n})^2 \cdot \overline{\sigma^2} \cdot n + (\frac{1}{n^2}) \overline{\sigma_{ij}} \cdot n(n-1) \\ &= (\frac{1}{n}) \cdot \overline{\sigma^2} + (1 - \frac{1}{n}) \overline{\sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (2\text{-}22)$$

식(2-22)에서 n이 증가함에 따라

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(\overline{\sigma^2}-\overline{\sigma_{ij}})+\overline{\sigma_{ij}}\right]=\overline{\sigma_{ij}}$$

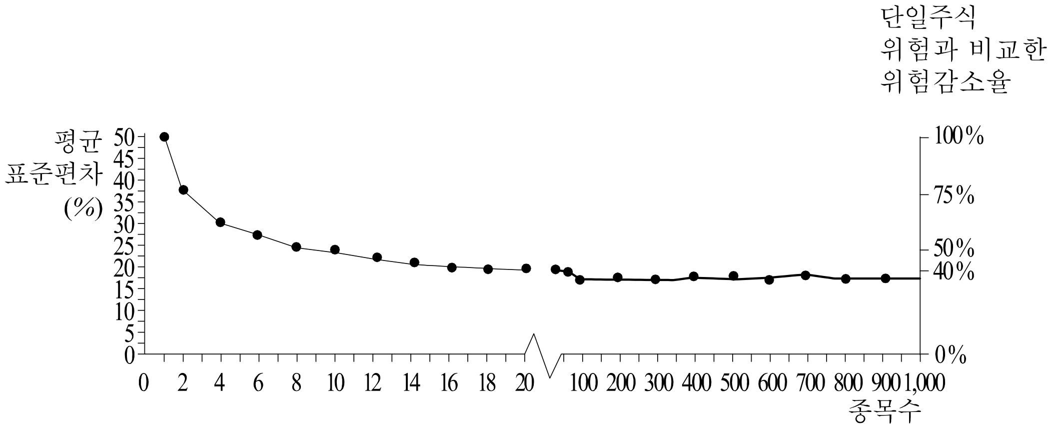
가 됨을 알 수 있다. 결국 포함되는 종목의 수가 계속 증가할수록 개별증권의 위험이 포트폴리오위험에 미치는 영향은 감소하고 포트폴리오위험은 각 종목들 간의 공분산의 평균에 접근해 간다. 여기서 구성종목수 n을 무한대로 증가시켜도 줄어들지 않는 위험이 있음을 알 수 있다. 이는 증권시장 전반의 공통적 요인에 의해서 야기되는 위험으로서 체계적 위험(systematic risk), 분산불능위험(non-diversifiable risk), 시장위험(market risk)이라고 부른다. 반면에 종목수가 증가함에 따라 감소하는 위험은 기업고유요인에 의해서 야기되는 위험으로써 기업고유위험(firm-specific risk), 비체계적 위험(non-systematic risk), 분산가능위험(diversifiable risk)이라고 부른다. 이 같은 논의를 바탕으로 내릴 수 있는 결론의 하나는 포트폴리오 투자에 있어 투자위험에 대한 적절한 보상은 분산불능위험인 체계적 위험에 한정해야 한다는 점이다. 이는 식(2-22)의 결과로부터도 유추할 수 있다. 또한, 분산투자시 투자위험이 감소하는 정도는 상관계수(ρ)의 크기에도 달려있다. 모든 증권들의 수익률이 동일한 표준편차(σ)를 지니고, 증권간의 상관관계가 상관계수 ρ로 공통적이라고 가정하면 식(2-22)는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Var(R_P)=\frac{1}{n}\sigma^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\rho\sigma^2 \tag{2-23}$$

따라서 분산투자의 종목 수가 증가할 때 투자위험이 감소하는 정도는 상관계수(ρ)의 크기에 달려있음을 볼 수 있다. ρ=0인 경우는 체계적 위험까지 제거되지만 ρ=0.5이면 체계적 위험의 반 정도가 감소하게 된다. 결국 특정 증권이 포

트폴리오위험에 미치는 영향은 특정 증권의 분산의 크기가 아니라 타 증권과의 공분산(상관관계)에 달려있음을 확인할 수 있다.

[그림 10] 구성종목수가 포트폴리오위험에 미치는 영향(미국의 경우)



라. 효율적 포트폴리오와 최적 포트폴리오의 선택

시장에는 선택 가능한 수많은 증권들이 있다. 이들 간의 결합 가능한 경우의 수와 투자비율의 조정까지를 고려하면 헤아릴 수 없이 많은 수의 포트폴리오가 투자대상으로 존재한다. [그림 11]의 점들은 많은 주식들로 이루어지는 모든 가능한 포트폴리오의 기대수익률과 위험의 조합을 나타내고 있는데 이 들을 투자기회집합(investment opportunity set)이라고 한다. 이 중에서 선택대상으로 적절한 포트폴리오는 XY선상에 위치하는 효율적 투자선(efficient frontier) 또는 효율적 포트폴리오 집합이다.

[그림 11] 위험자산의 효율적 포트폴리오와 최적포트폴리오

현실적으로 증권시장에 존재하는 모든 투자기회(포트폴리오)를 대상으로 효율적 투자선을 구하기 위해서는 ①일정한 기대수익률을 가지는 투자기회 중 위험이 최소인 점이나, ②일정한 위험수준에서 기대수익률이 최대인 점을 구하면 될 것인데, 이 해를 발견하는 데는 일반적으로 2차 계획법(quadratic programming)이 사용되고 있다. 일정한 기대수익률을 가지는 투자기회 중 위험이 최소인 최소분산 포트폴리오집합을 수식으로 표시하면 다음과 같이 정리된다.

$$\text{Min} \quad Var(R_P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Subject to

$$E(R_P) = \sum_{j=1}^{n} w_j E(R_j) = k \quad (k: \text{상수}) \tag{2-24}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1.0$$

위의 수식에서 목적 함수는 포트폴리오분산을 최소화하는 것으로 두었고 제약조건은 일정한 기대수익률의 값 k로 놓았다. 여기서 결정변수(decision variables)는 투자금액의 비율 wj이다. 또한 식 (2-24)에 의해 구한 최소분산포트폴리오집합 중에서는 최소분산포트폴리오(GMVP) 밑 부분의 비효율적 포트폴리오가 존재할 수 있다. 따라서 GMVP 윗 부분만의 효율적 포트폴리오는 다음 식(2-25)와 같이 일정한 분산(l)에서 포트폴리오 기대수익률을 최대화시키는 것을 찾으면 구해진다.

$$\text{Max} \qquad E(R_P) = \sum_{j=1}^{n} w_j E(R_j)$$

Subject to

$$Var(R_P) = l \; (l: \text{상수}) \qquad (2\text{-}25)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1.0$$

효율적 투자선 또는 효율적 포트폴리오가 이와 같은 방법으로 찾아지면 마지막 작업은 이 중에서 어떤 것이 투자자의 기대효용을 극대화하는 최적 포트폴리오(optimal portfolio)인가를 찾는 것이다. 최적 포트폴리오의 선택은 결론적으로 각 개인의 효용곡선, 즉 위험에 대한 태도에 달려 있다. 앞서 설명했던 것처럼 투자자의 무차별효용곡선과 효율적 투자선의 접점이 최적포트폴리오가 된다. [그림 11]에서 효용곡선 *d*와 같은 모양을 갖는 소극적 투자자는 Pd 의 포트폴리오를 최적 포트폴리오로 선택할 것이며 효용곡선 *e*와 같은 모양을 갖는 적극적 투자자에게는 *Pe* 의 포트폴리오가 효용을 극대화하는 최적 포트폴리오가 될 것이다.

마. 투입정보의 추정

이상에서 살펴 본 마코위츠의 포트폴리오 선택모형을 실제의 투자결정에 활용

하기 위해서는 식(2-24), 식(2-25)에 필요한 투입정보를 만들어내는 것이 필요하다. 즉 n개의 자산 각각에 대하여 기대수익률 $E(R_j)$과 분산 σ^2_j을 추정하고, 각 자산들간의 공분산 σ_{ij}을 $n(n-1)/2$만큼 추정하는 것이 필요하다. 이들 투입정보를 만드는 방법은 개별자산의 확률분포를 이용하여 기대수익률과 위험을 추정하는 것이다. 만약 미래 예상수익률의 분포가 과거 시계열자료의 패턴과 크게 차이나지 않을 것으로 예상되면 과거 역사적 시계열 자료로부터 이를 추정하기도 한다.

5. 무위험자산과 최적자원배분

투자관리의 핵심 중 하나는 주식, 회사채, 국공채, 부동산등 투자수익과 투자위험이 질적으로 상이한 각급 투자자산에 투자자금을 포괄적으로 어떻게 배분할 것인가를 결정하는 자산배분(asset allocation)에 관한 문제이다. 그리고 자산배분은 주식과 같은 위험자산과 국공채와 같은 무위험자산에 대한 투자비율의 결정문제로 압축할 수 있다. 그러면 포트폴리오를 구성할 때 주식, 회사채와 같은 위험자산(risky asset)과 정기예금이나 단기국공채 등의 무위험자산(risk-free asset)에 자금을 나누어 투자하여 자산배분을 시도할 때 최적자산배분, 최적포트폴리오의 결정은 어떻게 이루어지는지 알아보자.

가. 무위험자산

무위험자산(risk-free asset)은 어떠한 상황에서도 확정된 수익이 보장되어 수익률의 변동이 없기 때문에 그 위험(수익률의 표준편차)이 영인 투자자산을 말한다.

즉,

$$E(R_f) = R_f, \qquad \sigma(R_f) = 0$$

단, $E(R_f)$, $\sigma(R_f)$: 무위험자산의 기대수익률과 표준편차

R_f : 무위험이자율(risk − free rate)

일반적으로 정기예금이나 국공채와 같은 투자대상들이 무위험자산으로 인식되고 있다. 이러한 자산들도 엄밀한 의미에서 보면 위험이 없는 것이 아니지만 이러한 투자자산들은 명목수익률이 확정되어 있고, 만기가 짧은 단기국공채는 이자율변동위험이 매우 적고 특히, 지급불능위험이 없으므로 통상적으로 이 투자자산들을 무위험자산으로 취급하고 있다.

나. 무위험자산이 포함될 때 포트폴리오의 기대수익률과 위험

무위험자산이 포함될 때 포트폴리오의 기대수익률과 위험이 어떻게 달라지는가를 파악하여 보자. 먼저 위험자산만으로 구성되는 포트폴리오의 경우 [그림 12]의 호 XY상에 나타나 있는 효율적 포트폴리오집합이 투자대상으로 고려될 것이다. 이 중 하나인 포트폴리오 A에 투자자금의 w를 투자하고 무위험자산(기대수익률이 무위험이자율인 R_f이고, 위험이 0인 투자자산)에 나머지 투자자금 $(1-w)$를 투자할 경우의 기대수익률과 위험(표준편차)을 구해보면 식(2-26), 식(2-27)과 같이 표시할 수 있다. 왜냐하면 이 포트폴리오는 두 자산으로 구성되는 경우와 마찬가지이므로 식(2-7)과 식(2-12)를 그대로 이용할 수 있기 때문이다.

$$\begin{aligned} E(R_P) &= w \cdot E(R_A) + (1-w)R_f \\ &= R_f + w[E(R_A) - R_f] \end{aligned} \tag{2-26}$$

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2(\sigma_{R_f})^2 + 2w(1-w)\sigma_{AR_f} \\ &= w^2\sigma_A^2 \\ \therefore\ \sigma_P &= w\sigma_A \end{aligned} \tag{2-27}$$

단, R_f : 무위험이자율

$E(R_A)$: 위험자산 주식포트폴리오 A의 기대수익률

σ^2_A : 위험자산 주식포트폴리오 A의 분산

w : 위험자산 주식포트폴리오 A에 대한 투자비율

$1-w$: 무위험자산에 대한 투자비율

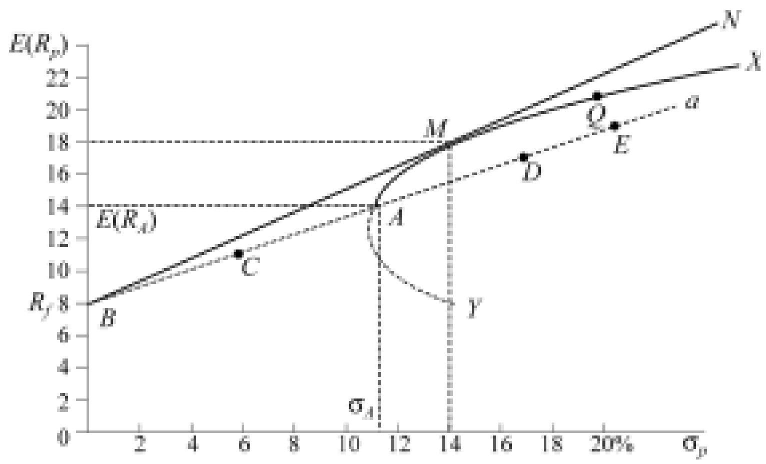
σ_{AR_f} : 주식 포트폴리오 A 수익률과 무위험이자율 간의 공분산

이제 식(2-27)에서 $w=\sigma_P/\sigma_A$ 이므로 이를 식(2-26)에 대입해 보면 투자비율과 관계없이 이 두 펀드 포트폴리오(two-fund portfolio : 무위험자산과 위험자산인 주식으로 구성되는 포트폴리오)의 기대수익률은 다음 식(2-28)처럼 위험(표준편차)과 선형적으로 비례하는 관계에 있음을 알 수 있다.

$$E(R_P) = R_f + \frac{E(R_A) - R_f}{\sigma_A}\sigma_P \tag{2-28}$$

무위험자산과 주식포트폴리오로 구성되는 두 펀드 포트폴리오를 구성할 때 기대되는 투자기회집합(investment opportunity set)은 [그림 12]에 나타난 선 $R_f a$ 처럼 절편이 R_f 이고 기울기가 $[E(R_A)-R_f]/\sigma_A$ 인 직선으로 표시되며 이 직선을 자산배분선(CAL: Capital Allocation Line)이라고 한다.

[그림 12] 무위험자산이 포함될 때의 투자기회집합



자산배분선 $R_f a$ 상에 오는 기대수익률과 위험의 조합들은 무위험자산과 포트폴리오 A로 투자 포트폴리오를 구성하는 모든 투자자들이 똑같이 얻게 되는 기대수익률과 위험의 조합을 뜻한다. 다만 이 직선 상 어느 점의 기대수익률과 위험을 얻게 되느냐 하는 것은 전적으로 두 펀드에 대한 투자비율에 달려 있다. 점 A는 투자자금 전부를 주식펀드에 투자하고 무위험자산에는 전혀 투자하지 않은 경우이고 점 B는 전액을 무위험자산에 투자한 경우이다. 반면에 점 D와 E는 본래의 투자자금에 R_f 수준의 이자율로 차입한 자금을 더하여 주식펀드에 100% 이상을 투자한 경우로 차입포트폴리오(borrowing portfolio)라고 하며 BA선상의 포트폴리오는 투자자가 금융기관에 자금을 빌려 준 것과 다름이 없으므로 대출포트폴리오(lending portfolio)라고 부른다. 여기에서 중요한 사실은 $R_f a$ 선상에서는 투자금액의 비율이 어떻게 조정되더라도 투자위험(σ_P)을 한 단위 증가시킬 때 얻게 되는 기대수익률의 증가 분인 위험보상률($[E(R_A)-R_f]/\sigma_A$)이 항상 일정하다는 점이다. 이 때의 비율, 즉 직선 $R_f a$ 의 기울기를 변동성보상비율(RVAR : reward-to-variability ratio)이라고 부른다.

$$RVAR = \frac{E(R_A) - R_f}{\sigma_A} \tag{2-29}$$

결론적으로 중요한 사실은 주식과 같은 위험자산만으로 포트폴리오를 구성하는 것보다도 무위험자산을 포트폴리오에 포함시켜 자산을 배분하는 것이 훨씬 우월한 투자성과를 기대케 한다는 점이다. 다시 말하면 무위험자산을 포함시켜야 한 단위 위험부담에 대한 투자수익률의 증가가 극대화된다. 이 같은 논리적 근거 때문에 실제의 포트폴리오 운용에서는 먼저 무위험자산펀드와 위험자산펀드의 두 펀드로 나누어 포트폴리오 구성을 하고 여기에 투자자금을 배분하는 자산배분이 중요한 의미를 갖는다.

[예 제] 기대수익률과 표준편차가 다음과 같은 주식펀드 A가 있고 이자율이 8%인 무위험자산이 있다. 이제 이 두 펀드로 포트폴리오를 구성하고자 한다.

주식펀드 A의 기대수익률 $E(R_A)=16\%$

주식펀드 A의 표준편차 $\sigma_A=12\%$

무위험이자율 $R_f=8\%$

㉠ 이제 주식펀드 A와 무위험자산 두 펀드에 대한 투자비율을 0 : 100, 50 : 50, 100 : 0, 150 : −50, 200 : −100으로 조정해 나갈 때 포트폴리오의 기대수익률과 위험을 계산하라.

㉡ 100% 전부를 주식펀드 A에 투자하는 것과 50 : 50으로 나누어 투자하는 것 사이에 변동성보상비율의 차이가 있는가?

㉠ 주식펀드에 대한 투자비율을 ω, 무위험자산에 대한 투자비율을 1− ω라고 표시하면 포트폴리오 기대수익률과 위험은 다음 식과 같으므로 양자는 다음 표와 같이 계산된다.

$$E(R_P)=R_f+\omega[E(R_A)-R_f]$$

$$\sigma_P=\omega\cdot\sigma_A$$

이 결과에서 포트폴리오 기대수익률은 위험에 선형적으로 비례함을 확인할 수 있다.

투 자 비 율		$E(R_P)$	ρ_P
ω_A	$\omega(R_f)$		
0.00	1.00	8%	0%
0.50	0.50	12	6
1.00	0.00	16	12
1.50	-0.50	20	18
2.00	-1.00	24	24

㉡ 투자위험이 한 단위 증가할 때 얻게 되는 위험 보상률의 증가, 즉 변동성보상비율은 투자금액의 비율에 관계없이 일정하다.

$$\frac{E(R_A)-R_f}{\sigma_A}=\frac{0.16-0.08}{0.12}=\frac{0.08}{0.12}\fallingdotseq 0.67$$

다. 위험선호도와 최적 포트폴리오의 선택

효율적 투자기회집합(efficient investment opportunity set) 또는 효율적 투자선(efficient frontier)의 도출은 모든 투자자에게 동일한 투자대상이 주어졌음을 의미한다. 투자자들은 이 동일한 투자기회집합 중에서 각 개인의 효용곡선, 즉 위험에 대한 태도(위험선호도)에 따라 위험자산펀드에 대한 투자비율을 조정하여 최적 포트폴리오를 선택하게 된다. 즉, 투자자의 무차별효용곡선과 효율적 투자선의 접점이 최적 포트폴리오가 된다. 이제 앞에서 살펴보았던 효용함수를 이용하여 최적 포트폴리오를 결정하는 과정을 알아보자.

앞에서 본 식(2-5)는 평균・분산 기준을 사용하여 투자안을 평가하는 투자자의 효용함수를 다음과 같이 제시하고 있다.

$$U = E(R) - 0.5C \cdot \sigma^2 \tag{2-5}$$

단, U : 효용의 크기　　C : 위험회피계수

한편, 무위험자산펀드와 위험자산펀드로 구성되는 포트폴리오의 기대수익률은 식(2-26)으로 표현되고 식(2-27)에서 $\sigma_P^2 = \omega^2\sigma_A^2$이 됨을 알 수 있다. 투자자는 최적 포트폴리오를 구성하도록 w를 선택하여 효용을 극대화 할 것이고 이 관계는 식(2-5)를 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$\text{Max} \quad U = E(R_P) - 0.5C\sigma_P^2 = R_f + \omega\,[E(R_A) - R_f] - 0.5C\omega^2\sigma_A^2$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.0$$

위의 식의 해를 구하기 위해서는 w에 대하여 미분을 하고 그 값을 영으로 하여 해를 구하면 위험회피형의 투자자가 최적포트폴리오를 구성하는 w*는 다음과 같이 구하여 진다.

$$\omega^* = \frac{E(R_A) - R_f}{C\sigma_A^2} \tag{2-30}$$

앞의 예제를 여기에 적용하여 보면 위험회피계수 C=8인 투자자의 경우

$$\omega^* = \frac{0.16 - 0.08}{8 \times 0.12^2} = 0.69$$

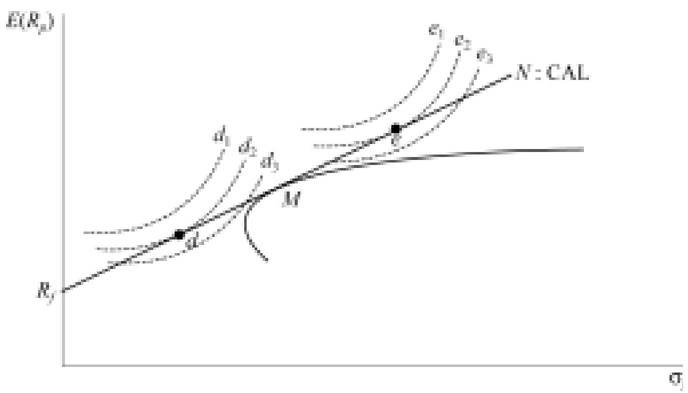
가 된다. 이 투자자는 투자금액의 69퍼센트를 위험자산펀드에 나머지 31퍼센트를 무위험자산펀드에 투자하여 효용을 극대화시키는 최적포트폴리오를 구성하게 된다. 이 때 얻게 되는 최적포트폴리오의 기대수익률과 표준편차는

$$E(R_P) = 0.08 + 0.69\,[0.16 - 0.08] = 0.1352$$
$$\sigma_P = 0.69 \times 0.12 = 0.0828$$

이 된다. 여기서 변동성보상비율 RVAR = (0.135 − 0.08)/0.0828 = 0.67이 되어 앞의 예제에서 구한 변동성비율과 일치함을 알 수 있다.

다음 [그림 13]은 이 특정 투자자는 투자금액의 69퍼센트를 위험자산펀드에 투자하여 최적포트폴리오 d를 선택하였으며 이 점에서 투자자의 무차별효용곡선과 효율적 투자선이 접하고 있음을 보여주고 있다.

[그림 13] 무위험자산을 포함할 경우의 최적포트폴리오선택



제2장 연습문제

1. 투자기회로서 다음과 같은 수익률의 확률분포를 가지는 증권 1, 2, 3이 있다.

시장여건	확률	증권 1	증권 2	증권 3
양 호	1/4	16%	4%	20%
평 균	1/2	12	6	14
불 량	1/4	8	8	8

① 개별적으로 한 종목씩 투자할 경우의 기대수익률과 위험(표준편차)를 구하라.

② 두 증권으로 포트폴리오를 구성할 경우의 공분산(σ_{12}, σ_{23}, σ_{13}),과 상관 계수(ρ_{12}, ρ_{23}, ρ_{13})를 구하라.

③ 각 증권에 대한 투자금액의 비율을 다음과 같이 조정할 때의 포트폴리오 기대수익률과 위험(분산)을 구하라.

ⓐ 1/2(증권 1) + 1/2(증권 2) ⓑ 1/2(증권 1) + 1/2(증권 3)

ⓒ 1/2(증권 2) + 1/2(증권 3) ⓓ 1/3(증권 1) + 1/3(증권 2) + 1/3(증권 3)

2. 투자기회로서 다음과 같은 특징을 지닌 주식 A, B가 있다. 또한 이 외에도 5% 무위험이자율로 차입하여 투자할 수도 있다. 주식 A를 1,000만원, 주식 B를 500만원 매입하고, 투자금액 중 500만원은 차입하여 포트폴리오를 구성하고자 한다. 이 포트폴리오의 기대수익률과 분산을 구하라.

	주식 A	주식 B
$E(R)$	0.10	0.16
σ_j^2	0.25	0.49
상 관 계 수	ρ_{AB} = 0.7	

[해 답]

1. ① $E(R_1)=1/4(0.16)+1/2(0.12)+1/4(0.08)=0.12;\ E(R_2)=0.06;\ E(R_3)=0.14$

$$\sigma(R_1)=[1/4(0.16-0.12)^2+1/2(0.12-0.12)^{+}1/4(0.08-0.12)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$=(0.0008)^{\frac{1}{2}}=0.0283$$

$$\sigma(R_2)=(0.0002)^{\frac{1}{2}}=0.0141,\qquad \sigma(r_3)=(0.0018)^{\frac{1}{2}}=0.0424$$

② $\sigma_{12}=(0.16-0.12)(0.04-0.06)1/4+(0.12-0.12)(0.06-0.06)1/2$
$+(0.08-0.12)(0.08-0.06)1/4=-0.0004$

$\sigma_{13}=0.0012,\quad \sigma_{23}=-0.0006$

$$\rho_{12}=\frac{-0.0004}{0.0283\times 0.0141}=-1,\quad \rho_{23}=-1,\quad \rho_{13}=+1$$

③ ⓐ $E(R_A)=1/2(0.12)+1/2(0.06)=0.09$

$\sigma^2(R_A)=(1/2)^2(0.0008)+(1/2)^2(0.0002)+2(1/2)(1/2)(-0.0004)=0.00005$

ⓑ $E(R_B)=0.13,\quad \sigma^2(R_B)=0.00125$

ⓒ $E(R_C)=0.10,\quad \sigma^2(R_C)=0.0002$

ⓓ $E(R_D)=1/3(0.12)+1/3(0.06)+1/3(0.14)=0.10667$

$$\sigma^2(R_D)=(1/3)^2(0.0008)+(1/3)^2(0.0002)+(1/3)^2(0.0018)$$
$$+2(1/3)(1/3)(-0.0004)+2(1/3)(1/3)(0.0012)$$
$$+2(1/3)(1/3)(-0.0006)=0.00036$$

2. 원래의 투자자금 1,000만원 대비 각각의 투자 가중치는 다음과 같다.
주식 A : 1,000만/1,000만=1 주식 B : 500만/1,000만=0.5
무위험자산 : -500만/1,000만=-0.5

$E(R_p)=1(0.10)+(0.5)(0.16)+(-0.5)(0.05)=0.155$

무위험자산의 표준편차는 영이므로

$\sigma^2(R_p)=(1)^2(0.25)+(0.5)^2(0.49)+2(1)(0.5)(0.7)(0.5)(0.7)=0.6175$

제3장 자본자산가격결정모형

1. 자본자산가격결정모형의 의의와 가정

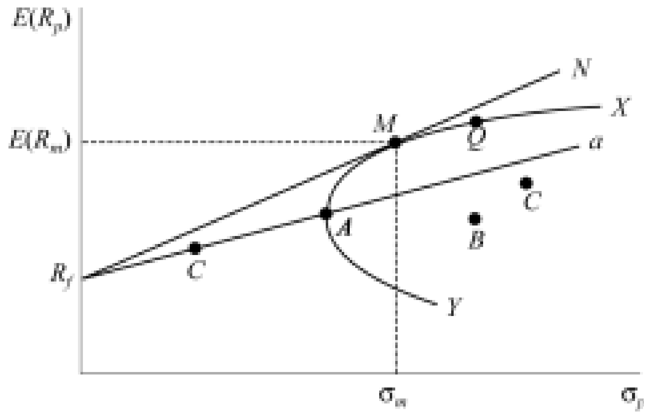
자본자산가격결정모형(CAPM : capital asset pricing model)이란 자본시장이 균형상태를 이룰 때 자본자산의 가격(기대수익)과 위험과의 관계를 예측하는 모형이다. 여기서 자본자산(capital asset)이란 미래의 수익에 대한 청구권(claim)을 가지는 자산을 말하는데, 주로 주식, 회사채 등의 유가증권을 가리킨다. 또한 균형상태(equilibrium condition)라는 것은 이들 자본자산이 거래되는 자본시장에서 수요와 공급이 일치되도록 가격이 형성된 상태를 말한다. 그러므로 자본자산가격결정모형은 개별투자자들이 앞에서 설명한 방법대로 효율적 분산투자를 하고 시장 전체가 균형상태에 있을 때 주식과 같은 자본자산의 균형가격이 어떻게 결정되는가를 예측하는 모형이라고 할 수 있다. 문헌적으로 보면 CAPM은 샤프(W. F. Sharpe : 1964), 린트너(J. Lintner : 1965), 모신(J. Mossin : 1965)에 의해서 거의 같은 시기에 독자적으로 제시되었다. 자본자산의 위험과 수익률 사이에 존재하는 균형관계를 설명하는 이들 이론 모형은 최근까지 현실의 증권시장에서 증권의 가격결정구조를 설명하는데 있어서 매우 유용한 것으로 인식되고 있다. 먼저 CAPM을 이해하는 데는 이 모형의 도출에 필요한 여러 가지 가정에 주의할 필요가 있다. 이들 가정은 비현실적인 면이 있지만, 위험과 기대수익과의 명확한 관계규명을 위해서 필요한 것들이다. CAPM의 가정을 요약하면 다음과 같다.

- 가정 1(평균・분산기준의 가정) : 투자자는 기대수익과 분산기준에 의해서만 투자 결정을 내리므로 포트폴리오 선택에 있어 마코위츠 모형을 따른다.
- 가정 2(동일한 투자기간의 가정) : 모든 투자자는 동일한 단일 투자기간을 갖고 이 단일 투자기간 이후에 발생하는 결과는 무시한다.
- 가정 3(완전시장의 가정) : 개인투자자는 자본시장에서 가격순응자(price taker)이고, 거래비용과 세금이 존재하지 않으므로 자본과 정보의 흐름에 아무런 마찰이 없다.
- 가정 4(무위험자산의 존재 가정) : 투자대상은 공개적으로 거래되고 있는 금융자산에 한정하고, 투자위험이 전혀 없는 무위험자산(risk-free asset)이 존재하며 모든 투자자들은 무위험이자율 수준으로 얼마든지 자금을 차입하거나 빌려 줄 수 있다.
- 가정 5(균형시장의 가정) : 자본시장이 수요와 공급이 일치하는 균형상태에 있다.
- 가정 6(동질적 미래예측의 가정) : 모든 투자자는 동일한 방법으로 증권을 분석하고 경제상황에 대한 예측도 동일하다. 따라서 미래증권수익률의 확률분포에 대하여 동질적으로 예측(homogeneous expectation)을 한다.

2. 자본시장선

가. 자본시장선의 도출

[그림 14] 자본시장선(CML)



앞장에서 효율적 포트폴리오를 구성하는 방법에 대하여 두 단계로 나누어 살펴본 바 있다. 하나는 주식과 같은 위험자산만으로 포트폴리오를 구성할 경우로서 마코위츠 모형에 의해서 일정한 기대수익 하에서 위험을 최소화시키는 효율적 투자선(efficient frontier)을 찾아내는 것이었다. [그림 14]는 앞장의 [그림 12]와 같은 그림인데 호XY가 위험자산만으로 구성되는 효율적 포트폴리오를 나타내고 있다. 두 번째 단계는 투자대상을 위험자산뿐만 아니라 위험이 없는 정기예금이나 국공채($E(R_f) = R_f$, $\sigma(R_f) = 0$)에도 확대하여 포트폴리오를 구성함으로써 더욱 우월한 투자성과를 가능케 하는 새로운 효율적 투자선, 즉, R_f에서 호XY에 접선을 그어서 얻어지는 $R_f MN$을 도출하는 단계다. R_f에서 호XY에 접선을 그었을 때 표시되는 투자선 $R_f MN$은 $R_f a$보다 같은 위험에서 더 높은 기대수익률을 가지므로 더 효율적이다 ($R_f MN$의 기울기는 호XY상의 어떤 포트폴리오와 결합하여 얻어지는 투자선보다도 기울기가 크다). 이 때 포트폴리오 M은 위험자산포트폴리오 중에서 변동성보상비율(기울기)이 가장 큰 포트폴리오이므로 포트폴리오 A나 Q 등과 비교할 때 위험자산 중에서 궁극적으로 유일한 효율적 포트폴리오가 된다. 따라서 자산배분선 $R_f MN$은 투자자금의 일부를 무위험자산펀드(R_f)에 투자하고 나머지를 위험자산포트폴리오 M에 투자하여 얻어지는 가장 효율적인 투자기회집합을 나타낸다. 여기서 포트폴리오 M을 시장포트폴리오(market portfolio)라고 하는데, 위험자산으로서는 유일하게 효율적인 투자대상이므로 투자가들은 모두 포트폴리오 M에 투자하여 그들이 소유한 개인 포트폴리오의 투자 수익률을 극대화하려 할 것이다. 개인 투자자들이 소유한 위험자산 포트폴리오의 합이 포트폴리오 M이 될 것이므로 결과적으로 포트폴리오 M은 시장에 존재하는 모든 위험자산을 포함하는 시장포트폴리오가 된다. 이러한 방법으로 투자자들이 투자자금을 정기예금이나 국공채와 같은 무위험자산과 효율적 위험자산 포트폴리오 M에 나누어 투자할 때 균형상태의 자본시장에서 도출되는 새로운 효율적 투자기회집합 즉, 효율적 포트폴리오의 기대수익률과 위험 사이에는 일정한 선형적인 관계가 성립한다. 이 관계를 그래프로 표시한 것이 자본시장선(CML : capital market line)이다. 이 자본시장선은 본질적으로 무위험자산과 위험자산포트폴리오 M의 자산배분선(CAL)이 되므로 앞장의 식(2-28)과 같다. 식(2-28)을 포트폴리오 M을 포함하는 식으로 고쳐 쓰면 식(3-1)이 된다.

$$E(R_P) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m} \sigma_P \qquad (3\text{-}1)$$

단, $E(R_m)$: 시장포트폴리오의 기대수익률
σ_m : 시장포트폴리오의 표준편차

여기서 기울기 $[E(R_m)-R_f]/\sigma_m$ 은 RVAR인데 여기서는 시장위험 1단위에 대한 위험보상률(risk premium)을 나타낸 것이므로 위험의 균형가격(equilibrium price of risk)이라고 부른다. 균형시장에서는 앞장에서 설명하였듯이 어느 투자자들에게나 이 위험보상률은 동일하다.

나. 시장포트폴리오

자본시장선이 밝히고 있는 기대수익률과 위험의 관계를 보다 잘 이해하기 위해서는 시장포트폴리오 M의 특성을 좀 더 자세히 알아 볼 필요가 있다. 첫째, 모든 투자자들은 자신의 위험선호도와 관계없이 위험자산 포트폴리오로는 유일하게 시장포트폴리오 M을 선택하게 된다. CML선상의 어느 점이든 모두 시장포트폴리오 M에 일부 투자하는 것을 나타낸다. 이 때 시장포트폴리오 M은 무위험자산을 투자대상으로 포함시킬 때 위험자산 포트폴리오(마코위츠의 효율적 프론티어)중에서 유일하게 투자대상에 포함되는 효율적 포트폴리오이며 $[E(R_p)-R_f]/\sigma_p$ 이 극대화되는 포트폴리오였다. 따라서 이성적 투자자라면 자신들의 위험선호도와 관계없이 모두 동일하게 시장포트폴리오를 선택하게 된다. 이 결과를 뮤츄얼펀드정리(Mutual Fund Theorem) 또는 투펀드정리(Two Fund Theorem)라고도 하는데 이는 토빈(J. Tobin)의 분리정리(Tobin's separation theorem)의 또 다른 표현이 된다. 즉, 최적 포트폴리오의 구성은 별개의 두 단계로 분리하여 이루어지게 되는데, 첫째 단계에서는 위험자산들의 효율적 결합은 개별투자자들의 위험선호도에 관계없이 이루어지며, 그 결과로 얻어지는 시장포트폴리오 M(뮤츄얼펀드)은 모든 투자자들의 동일한 투자대상이 되는 것이고, 둘째 단계는 투자자들의

위험선호도에 따라 무위험자산과 시장포트폴리오에 대한 투자비율을 결정하여 최적포트폴리오를 구성하는 것이다. 결과적으로 투자결정과 자본조달결정은 서로 별개의 문제가 된다. 둘째, 시장포트폴리오는 시가 총액의 구성비율대로 구성되는 포트폴리오(value weighted portfolio)이며 모든 위험자산을 포함하는 완전분산 투자된 포트폴리오이다. 투자자들이 위험자산(대표적으로 주식)의 기대수익률과 위험에 대하여 평균·분산기준을 적용하고(가정 1) 동질적 예측(가정 6)을 하게 되면 투자자 모두는 동일한 효율적 포트폴리오 집합을 도출할 것이고 그 결과 동일한 효율적 포트폴리오 M을 선택할 것이므로 최적 포트폴리오를 구성하는 개별주식에 대한 투자비율 또한 모두 동일하게 유지될 것이다. 그래서 균형상태 하에서는 개별주식에 대한 투자비율(wj)은 시장 전체 주식의 총시장가치에 대해서 개별주식의 총시장가치(=개별주식가격×발행주식수)의 비율대로 구성된다.

$$w_j = \frac{\text{개별주식 } j\text{의 총시장가치}}{\text{시장 전체 주식의 총시장가치} } \tag{3-2}$$

만약 이와 같은 비율대로 구성되지 않으면 특정주식에 대하여 초과수요나 초과공급이 있음을 의미하게 되며 이 때 해당주식의 가격이 상승하거나 하락하여 시장은 수요와 공급이 일치하는 균형상태로 복귀하여 결국 시가총액의 비율대로 구성된다. 마찬가지 논리로 시장포트폴리오는 거래대상의 모든 위험자산(주식)을 포함하게 된다. 만약 포함이 안 되는 주식이 있다면 이러한 주식은 수요가 없음을 의미하므로 가격이 하락하게 될 것이다. 가격이 상당한 수준으로 하락하게 되면 다시 수요가 있게 되므로 투자대상으로 포함되게 된다. 따라서 시장포트폴리오는 모든 위험자산을 포함하는 완전 분산 투자된 효율적 포트폴리오인 것이다. 셋째, 시장포트폴리오의 특성을 가장 잘 나타내는 현실적인 대용물로서 종합주가지수를 들 수 있다. 모든 위험자산을 포함하는 시장포트폴리오는 엄격한 의미에서 볼 때 현실의 자본시장에서는 발견하기가 어렵다. 그런데 종합주가지수는 시장포트폴리오의 변화양상을 비교적 가깝게 나타내 주고 있으므로 흔히 이를 대용치(proxy)로 사용하고 있다. 종

합주가지수를 대용치로 사용하는 경우, 시장포트폴리오의 수익률은 다음과 같이 측정된다.

$$R_{mt} = \frac{I_{t+1} - I_t}{I_t} + D_{mt} \tag{3-3}$$

단, R_{mt} : t기간의 시장포트폴리오 수익률
I_t : 기초의 종합주가지수
I_{t+1} : 기말의 종합주가지수
D_{mt} : t기간의 주식들의 평균배당수익률

시장포트폴리오의 기대수익률 $E(R_m)$과 분산 σ^2_m은 여러 기간에 걸친 종합주가지수 시계열자료로부터 식(3-3)에 의해서 계산되어진 수익률의 평균과 분산을 구하여 사용하고 있다.

3. 증권시장선

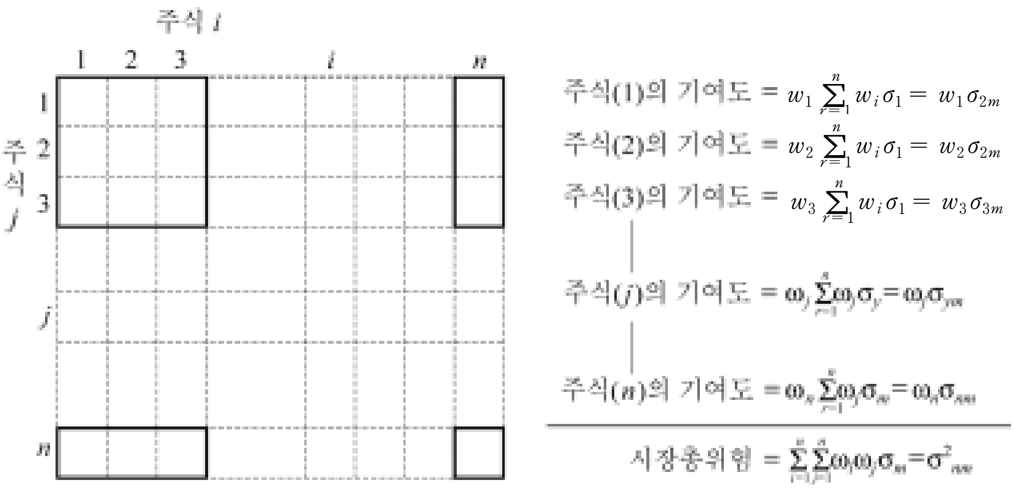
자본시장선(CML)은 효율적 포트폴리오의 기대수익률과 위험(표준편차)과의 선형적 관계를 나타낸 반면 증권시장선(SML : security market line)은 비효율적인 투자대상까지 포함한 모든 투자자산의 기대수익과 위험의 관계를 나타낸 것이다. CAPM의 핵심이 되는 증권시장선을 도출하기 위해서 먼저 개별증권의 위험이 어떻게 평가되는지를 살펴보기로 하자.

가. 개별증권의 위험과 균형기대수익률

개별투자자의 궁극적인 관심은 최종적인 효율적 포트폴리오의 구성에 있으므로

개별증권의 위험을 평가할 때는 투자자의 투자대상이 되는 효율적 포트폴리오의 분산에 대한 개별증권의 기여도에 근거하여야 할 것이다. 포트폴리오에 투자하는 투자자에게 의미 있는 것은 개별증권의 위험이 아니라 전체 포트폴리오의 위험이며 이 포트폴리오의 위험이 위험보상률(risk premium)을 결정한다. 모든 투자자들은 앞에서 설명한 것처럼 효율적 포트폴리오를 구성할 때 위험자산으로는 시장포트폴리오에만 투자할 것이므로 개별주식의 위험은 그 주식이 시장포트폴리오의 위험에 미치는 영향의 정도로 측정하는 것이 타당하다고 하겠다. 개별 주식이 시장포트폴리오의 위험에 미치는 영향은 [그림 15]를 통하여 잘 이해될 수 있다.

[그림 15] 포트폴리오위험에서 차지하는 개별주식의 기여도



그리고 총 시장위험인 시장포트폴리오의 분산 σ^2_m은 [그림15]에 나타난 모든 부분의 합으로 식(3-4)과 같이 표시된다.

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{3-4}$$

이 중에서 개별주식, 이를테면 주식 (1)이 시장포트폴리오의 위험에 영향을 미치는 부분은 [그림 15]의 제일 윗줄에 해당하는 $w_1 \sigma_{1m}$이다. 따라서 시장포트폴리오의 분산에 대하여 개별주식 j의 영향(기여도)은

$$\begin{aligned} &\omega_j\,(\omega_1\sigma_{j1}+\omega_2\sigma_{j2}+\cdot\cdot\cdot+\omega_i\sigma_{ji}+\cdot\cdot\cdot+\omega_n\sigma_{jn}) \\ &= \ \omega_j \cdot Cov(R_j,\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i R_i) \\ &= \ \omega_j \cdot Cov(R_j, R_m) \\ &= \ wj\sigma jm \qquad (3\text{-}5) \end{aligned}$$

이 되어 (개별주식 j에의 투자비율)×(개별주식 j와 시장포트폴리오의 공분산)으로 표시된다. 그리고 시장포트폴리오의 위험보상률(risk premium)은 다음 식(3-6)과 같이 표시할 수 있다.

$$E(R_m)-R_f=\omega_1[E(R_1)-R_f]+\cdot\cdot\cdot+\omega_j[E(R_j)-R_f]+\cdot\cdot\cdot\ \ \omega_n[E(R_n)-R_f] \qquad (3\text{-}6)$$

위 식에서 시장포트폴리오의 위험보상률에 대한 주식 j의 기여분은 우변의 j번째 항으로 $\omega_j\,[E(R_j)-R_f]$이 된다. 식(3-5)와 식(3-6)에서 주식 j의 시장포트폴리오에 대한 위험대비 위험보상률의 상대적 기여도는 다음 식(3-7)과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{E(R_j)\ -\ R_f}{\sigma_{jm}} \qquad (3\text{-}7)$$

같은 논리로 투자자들이 시장포트폴리오를 보유함으로써 얻게 되는 위험대비 위험보상률의 상대적 비율은 다음과 같다.

$$\frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2} \tag{3-8}$$

그리고 균형상태에서는 모든 위험자산에 대하여 위의 식(3-7)과 식(3-8)에 대하여 다음의 관계가 성립되어야 한다.

$$\frac{E(R_j) - R_f}{\sigma_{jm}} = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2} \tag{3-9}$$

균형상태에서는 투자자들이 어떤 위험자산 또는 위험자산 포트폴리오를 보유하여 추가적 위험을 부담할 때 이에 대한 보상(위험보상률)이 모든 자산에 대하여 동일하여야 한다는 말이다. 만일 그렇지 않다면 상대적으로 유리한 자산 또는 포트폴리오로 수요가 몰릴 것이며 이는 가격상승을 야기할 것이다(수요와 공급의 불일치 -> 불균형상태). 그러면 가격조정을 통하여 위의 관계가 회복될 것이고 이 때 다시 균형상태에 이르게 되므로 식(3-9)의 관계는 균형상태에서는 반드시 성립된다고 말할 수 있다. 이제 식(3-9)를 자산 j의 기대수익률에 대하여 정리하면 다음의 식을 얻게 되는데 이를 증권시장선(SML: Security Market Line)식이라고 부르며 자본자산가격결정모형(CAPM)이 제시하는 개별자산의 기대수익률과 베타와의 관계를 나타내는 식이다.

$$E(R_j) = R_f + [E(R_m) - R_f]\frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}$$

또는,
$$E(R_j) = R_f + [E(R_m) - R_f]\beta_j \tag{3-10}$$

단, $E(R_j)$: 주식 j의 기대수익률 R_f : 무위험자산의수익률

$E(R_m)$: 시장포트폴리오의 기대수익률 β_j : 주식 j의 베타계수($=\sigma_{jm}/\sigma_m^2$)

이 식에서 σ_{jm} / σ^2_m, 베타(β)계수로 불리워지는 부분은 시장포트폴리오의 전체 수익률변동에 대한 개별주식 수익률변동의 기여분을 분수로 표시한 것으로 개별주식의 위험이 시장포트폴리오 위험에 미치는 영향을 측정하는 위험척도가 된다. 식(3-10)이 제시하는 바는 CAPM의 가장 중요한 결론으로 균형 하에서 자산 j의 위험보상률(risk premium) $E(R_j) - R_f$은 그 자신의 베타계수에만 비례한다는 것이다. 다시 말하면 투자자들이 충분히 많은 수의 자본자산(증권)에 분산투자를 한다면 투자자들은 체계적위험(시장위험)만을 부담할 것이므로 균형상태에서 투자자들이 요구하는 개별증권에 대한 위험보상률은 개별증권의 체계적위험을 표시하는 베타계수에 비례한다는 것이다.

나. CAPM과 균형가격

CAPM을 가격결정모형이라고 부르는 이유는 증권시장선식을 균형조건하에서 주식의 가치평가에 적용할 수 있기 때문이다. 즉 주식의 가격을 이용하여 정의되는 수익률을 증권시장선식과 결합하면 주식의 균형가격을 다음과 같이 제시할 수 있다.

$$E(R_j) = \frac{E(P_1) - P_0}{P_0} = R_f + [E(R_m) - R_f]\beta_j$$

이 식을 P_0에 대하여 정리하면 다음의 식이 얻어진다.

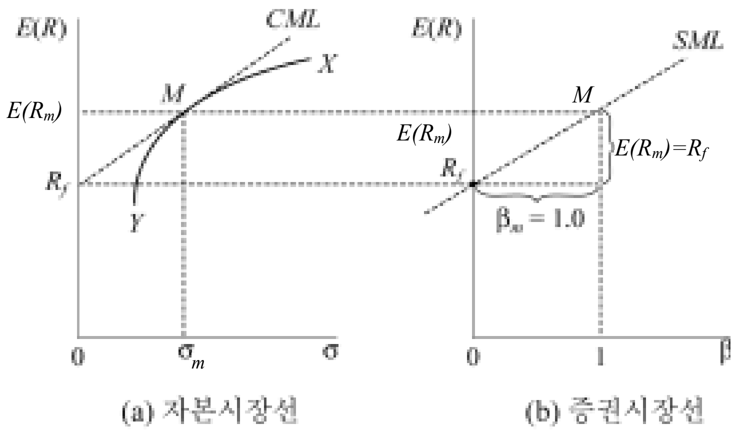
$$P_0 = \frac{E(P_1)}{1 + R_f + [E(R_m) - R_f]\beta_j} = \frac{E(P_1)}{1 + E(R_j)} \tag{3-11}$$

식(3-11)은 위험수정할인율을 이용한 주식의 균형가치평가 공식이 된다.

다. 증권시장선

식(3-10)을 그래프로 그리면 베타와 기대수익률사이에는 [그림 16]과 같이 완전한 선형관계가 성립하는데 이 직선을 증권시장선(SML: Security Market Line)이라고 한다.

[그림 16] 증권시장선과 자본시장선



이 증권시장선이 의미하는 바는 균형자본시장에서 자본자산의 기대수익률을 결정짓는 위험은 β계수로 대표되는 체계적 위험이고 이 체계적 위험이 높으면 기대수익률도 높고, 체계적 위험이 낮으면 기대수익률도 낮다는 것이다. 증권시장선은 투자자산의 위험보상률(risk premium)이 어떻게 결정되어야 하는지를 나타내고 있는데 기본적으로 투자자산의 균형수익률이 무위험자산수익률(R_f)에 적절한 위험보상률을 합하여 결정된다. 이를 식(3-12)과 같이 초과수익률의 형태로 표시하면 위험보상의 크기가 어떻게 구성되는지 잘 볼 수 있다.

$$E(R_j) - R_f = [E(R_m) - R_f]\beta_j \quad (3\text{-}12)$$

이 식에서 위험보상률(risk premium)은 두 가지 부분으로 구성되고 있는데, 먼저 $[E(R_m) - R_f]$는 시장포트폴리오, 즉 시장 전체에 대한 평균적인 위험보상률(market risk premium)이며 증권시장선의 기울기이다. 위험보상률을 결정짓는 또 한 가지는 특정증권의 체계적 위험을 나타내는 β계수이다. 그래서 특정증권의 위험보상률(security risk premium)은 평균적인 시장위험보상률에 개별증권의 체계적 위험을 곱하여 구해진다.

라. CML과 SML의 관계

표면적으로 볼 때 시장균형모형으로서 CML은 $E(R)$, σ 공간에 표시되고 SML은 $E(R)$, β 공간에 표시된다는 점에서 먼저 차이가 있다. [그림 16]의 CML은 위험자산의 포트폴리오에서 가장 효율적인 시장포트폴리오 M과 무위험자산의 결합으로 이루어지는 새로운 효율적 투자선이다. CML은 기대수익률 $E(R)$과 표준편차 σ의 공간에서 양자의 선형적 관계를 표시하고 있다. 이 직선은 R_f에서 위험자산만으로 구성되는 최소분산포트폴리오에 그은 접선이었는데, 절편은 R_f이고 기울기는 $[E(R_m) - R_f] / \sigma_m$이었다. 그래서 이 CML상에 오는 것은 완전분산투자된 효율적 포트폴리오뿐이다. 반면에 증권시장선(SML)상에 오는 것은 효율적이든 비효율적이든 모든 포트폴리오뿐만 아니라 개별주식들도 표시된다는 점에서 차이가 있다. 또한 SML은 기대수익률 $E(R)$과 베타계수 β의 공간에서 직선으로 표시되는데, 이 때의 절편은 무위험자산의 β가 영이므로 R_f가 될 것이고, 기울기는 시장포트폴리오의 베타 β가 1이고, 높이는 $[E(R_m) - R_f]$가 될 것이므로 $[E(R_m) - R_f]/1.0$, 즉 $E(R_m) - R_f$가 된다. 개별투자자들이 자본시장에서 무위험이자율로 차입이나 대출을 받고 동시에 시장포트폴리오에 투자함으로써 얻게 되는 최상의 효율적 포트폴리오만이 CML상에 오게 되고 개별증권은 CML선상의 오른쪽 아래에 위치하게 된다. 왜냐하면 개별증권은 비체계적위험을 지니고 있기 때문이다. 반면에 이러한 비효율적인 개별증권은 CML선상에 위치하지는 않지만 SML선상에는 위치할 수 있다.

마. 균형가격의 형성과 SML의 투자결정에의 이용

(1) CAPM에서의 균형가격의 형성

균형가격은 시장에서 수요・공급이 일치되어 증권가격의 상승을 가져오는 사고자 하는 압력이나, 하락을 가져오는 팔고자 하는 압력이 없는 상태에서 결정된다. 만일 어느 증권의 기대수익률이 너무 높거나 낮아 가격형성이 잘못되어 있으면 사거나 팔고자 하는 압력이 즉시에 작용하여 가격은 균형상태 수준으로 돌아오게 된다. 시장에서의 비균형가격이 어떻게 균형가격으로 되는지를 보기 위해서 먼저 증권의 시장가격과 기대수익률과의 관계를 표시하면 다음과 같다.

$$E(R) = \frac{E(P_1) + E(D)}{P_0} - 1 \tag{3-13}$$

단, $E(R)$: 기대수익률

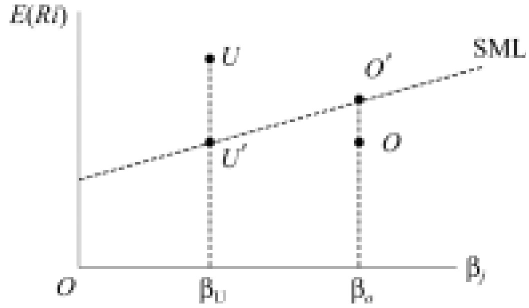
P_0 : 기초시장가격

$E(P_1)$: 기말기대시장가격

$E(D)$: 기간 중 기대배당금

이와 같은 균형가격의 형성과정을 [그림 17]의 SML에서 보기로 하자. 시장이 균형상태에 있으면 자산의 기대수익률은 체계적 위험에 선형적으로 비례하므로 정확히 SML상에 있도록 결정된다. 만약 시장이 불균형 상태이어서 [그림 17]에서의 U와 같은 주식이 존재한다면 이 상태는 오래 계속되지 못한다. 왜냐하면 주식 U의 체계적 위험(βU)수준에서는 U′수준의 기대수익률이 적절한데 이보다 높은 수익률을 기대할 수 있으므로 이성적인 투자자라면 이와 같은 과소평가(under-priced)된 주식을 매입하려고 할 것이기 때문이다. 매입하고자 하는 압력이 높게 작용하면 가격은 상승하고 기대수익률은 하락하여 U'수준이 될 것이다.

[그림 17] 증권시장과 균형가격의 형성



반대로 주식 O와 같이 그 체계적 위험(β_O)수준에서의 기대수익률보다도 낮은 수익률이 예상되는 주식이 존재한다면 이는 과대평가(over-priced)된 주식이므로 이러한 주식은 팔려고 할 것이다. 매각하고자 하는 압력이 높게 작용하면 가격은 하락하고 기대수익률은 O′ 수준으로 상승 회복하게 될 것이다.

(2) CAPM의 투자결정에의 이용

이상에서 설명한 것처럼 균형상태의 시장에서는 투자자산의 기대수익률이 체계적 위험의 척도인 β에 따라 선형적으로 결정되어 SML상에 오게 된다. 결국 SML상의 기대수익률은 균형상태에서 투자위험을 감안한 적정수익률이므로 주식과 같은 위험 투자자산에 대한 투자결정문제에 활용될 수 있다. 구체적으로는 특정증권의 요구수익률 추정과 증권의 평가, 자기자본비용의 추정, 자본예산, 공공요금의 산정, 비상장주식의 평가, 투자성과평가 등에 이용되고 있다.

1) 요구수익률의 추정과 증권의 과대ㆍ과소 여부 평가

증권시장선(SML)은 투자위험 가운데 체계적 위험만이 위험보상에 반영되어야 하고 균형시장에서의 투자자산의 기대수익률은 이 체계적 위험척도인 β의 크기에 따라 선형적으로 결정된다는 것을 나타낸 것이다. 따라서 위험증권에 대한 요구수익률(required rate of return)을 추정할 때 SML식으로부터 계산되는 기대수익률을 이용할 수 있다.

$$k_j = RRR_j = R_f + \beta_j \cdot [E(R_m) - R_f] \tag{3-14}$$

단, $k_j(=RRR)$: 주식 j에 대한 요구수익률

또한 SML상의 기대수익률은 체계적 위험을 감안한 적정균형수익률이라는 의미가 있으므로 특정증권이 과소평가되었는지 아니면 과대평가되었는지를 판단할 때 기준으로 쓰일 수 있다. 이를테면 다음 식에서 표시된 것처럼 SML상의 적정균형수익률을 요구수익률(k)로 대용하고, 기대수익률(E(Rj))은 해당주식에 대한 증권분석이나 과거 시계열자료의 분석에서 추정하여 구한 다음 양자의 차이(α)를 구하면 과소평가 혹은 과대평가 여부를 판단할 수 있다. 이 α가 양이면 과소평가, 음이면 과대평가된 증권일 것이다.

$$\alpha = E(R_j) - k_j \tag{3-15}$$

단, α : 과소평가(+), 과대평가(−)의 크기

$E(R_j)$: 증권분석이나 시계열 분석결과 추정된 기대수익률

k_j : SML상에서 추정된 요구수익률(RRR)

앞의 [그림 17]에 표시된 주식들을 예로 들면 주식 U는 체계적 위험을 감안할 때 적정균형수익률이상의 수익률이 예상되는 주식이므로 과소평가된 투자대상이다. 반면에 주식 O는 체계적 위험 β_O을 감안할 때 적정균형수익률(O’)이하의 수익률이 예상되므로 과대평가되었다고 할 수 있다. 이제 다음의 예제를 통하여 SML을 도출한 다음 특정주식에 대한 요구수익률을 추정하고, 그 주식이 과대평가되었는지, 과소평가되었는지를 판단하는데 이용하는 예를 보기로 한다.

[예 제] 다음은 증권분석의 결과 얻은 주식회사 J의 수익률(R_j)과 시장수익률(R_m)에 대한 예상자료이다. 한편 무위험이자율 (R_f)은 6%이다.

상 황	확 률	R_m	R_j
Ⅰ	0.2	0.20	0.50
Ⅱ	0.3	0.05	0.00
Ⅲ	0.4	0.15	0.20
Ⅳ	0.1	−0.15	−0.30

이 자료로부터 ㉠ 증권시장선(SML)을 도출하고 ㉡ J주식에 대한 기대수익률과 요구수익률(RRR)을 구하라. 또 ㉢ 주식 J가 과소평가 되었는지, 과대평가 되었는지를 평가하라

㉠ 증권시장선의 도출 : $E(R_j) = R_f + [E(R_m) - R_f] \cdot \beta_j$

R_m 자료로부터

$$E(R_m) = 0.20(0.2) + 0.05(0.3) + 0.15(0.4) + (-0.15)(0.1) = 0.10$$

$$\therefore\ E(R_j) = 0.06 + [0.10 - 0.06]\beta_j = 0.06 + 0.04\beta_j$$

㉡ i) J주식의 기대수익률

$$E(R_j) = 0.50(0.2) + 0.00(0.3) + 0.20(0.4) - 0.30(0.1) = 0.15$$

ii) J주식에 대한 요구수익률

$$k(=RRR) = 0.06 + 0.04\beta_j \quad \left(\beta_j = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}\right)$$

β를 구하기 위해서 σ_{jm}와 σ_m^2을 추정하면,

$$\sigma_{jm} = (0.20 - 0.10)(0.50 - 0.15)0.2 + (0.05 - 0.10)$$
$$(0.00 - 0.15)0.3 + (0.15 - 0.10)(0.20 - 0.15)0.4$$
$$+ (-0.15 - 0.10)(-0.30 - 0.15)0.1 = 0.0215$$

$$\sigma_m^2 = (0.20 - 0.10)^2 0.2 + (0.05 - 0.10)^2 0.3$$
$$+ (0.15 - 0.10)^2 0.4 + (-0.15 - 0.10)^2 0.1 = 0.01$$

$$\therefore\ \beta_j = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2} = \frac{0.0215}{0.01} = 2.15$$

㉢ $\alpha = E(R_j) - k_j = 0.15 - 0.146 = 0.004$

요구수익률이 14.6%로서 기대수익률 15%보다 낮으므로 과소평가

[예 제]

다음 자료는 B사 주식의 수익률과 시장수익률에 관한 과거 일정기간의 자료이다(무위험이자율 Rj = 6.6%). 미래 투자기간의 예상수익률도 과거추세와 같을 것으로 판단하고 있다.

월	시장수익률 (R_{mt})	B사 수익률 (R_{Bt})
1	0.12	0.05
2	−0.03	−0.05
3	0.27	0.25
4	0.12	0.15
5	−0.03	−0.10
6	0.27	0.30

이 자료로부터 ㉠ 증권시장선 ㉡ B주식에 대한 요구수익률 ㉢ 과소 또는 과대평가되었는지를 평가하라.

㉠ 증권시장선의 도출

$$E(R_m) = \frac{1}{6}\sum R_{mt} = 0.12$$

$$\therefore\ E(R_B) = 0.066 + [0.12 - 0.066]\beta_B = 0.066 + 0.054\beta_B$$

㉡ i) B주식에 대한 기대수익률

$$E(R_B) = \frac{1}{6}\sum R_{Bt} = 0.10$$

ii) B주식 요구수익률의 추정 $k_B = 0.066 + 0.054\beta_B$

$$\sigma_{Bm} = \sum\frac{[(R_B - E(R_B))(R_m - E(R_m))]}{6-1} = \frac{0.105}{5} = 0.021$$

$$\sigma_m^2 = \sum\frac{[R_m - E(R_m)]^2}{6-1} = \frac{0.09}{5} = 0.018$$

$$\therefore\ \beta_B = \frac{\sigma_{Bm}}{\sigma_m^2} = \frac{0.021}{0.018} = 1.1667$$

$$\therefore\ k_B = 0.066 + 0.054(1.1667) = 0.129$$

㉢ $\alpha = E(R_B) - k_B = 0.10 - 0.129 = -0.029$

요구수익률이 12.9%인데 평균적 기대수익률은 10%이므로 과대평가

2) 자기자본비용과 주식의 내재가치 추정

SML상에서 β에 선형적으로 표시되는 특정주식의 요구수익률은 한편으로 균형시장에서 주주의 기회투자수익률(기회자본비용)을 의미한다. 따라서 SML식을 자기자본비용의 추정에 다음과 같이 이용할 수 있다.

$$k_e = E(R_j) = R_f + \beta_j[E(R_m) - R_f]$$

앞의 j기업에 관한 예제에서 j주식의 자기자본비용은 14.6%가 된다. 이처럼 SML상에 표시되는 요구수익률을 자기자본비용 내지 주주들의 기회투자수익률(ke)로 이용할 수 있으며 이를 주식의 내재적 가치를 구하는 데 활용할 수 있다. 이익・배당흐름이 매년 g%만큼 계속적으로 성장할 경우 주식의 이론적 가치는 다음 식(배당성향성장모형)과 같이 표시되므로, 이 식의 분모할인율에 SML식으로 추정된 자기자본비용(주주의 기회투자수익률)을 대입하여 주식가치를 추정한다.

$$V_o = \frac{d_1}{k_e - g}$$

단, V_o : 주식의 내재적 가치 d_1 : 차기의 주당 배당금

k_e : 주주의 기회 투자수익률(자기자본비용)

g : 이익・배당의 성장률(매년 일정하다고 가정)

[예 제]

A주식의 차기 배당금(d_1)이 ₩2,000, 연간 성장률이 10%로 일정하리라고 예상되고 있다. 한편 무위험이자율(R_f)은 8%, 시장 포트폴리오의 기대수익률과 분산은 각각 18%, 0.02, A주식과 시장 포트폴리오와의 공분산(σ_{Am})은 0.03이다. A주식의 요구수익률과 내재가치는 얼마인가?

㉠ A주식의 요구수익률

$$k_e = 0.08 + (0.18 - 0.08)\frac{0.03}{0.02} = 0.23$$

㉡ A주식의 내재가치

$$V_0 = \frac{d_1}{k_e - g} = \frac{2,000}{0.23 - 0.10} = ₩15,385$$

3) 자본예산 결정

SML식은 기업의 재무담당자가 불확실성 하에서 시설투자와 같은 자본적 지출의 경제적 타당성을 검토할 때 평가기준(거부율: hurdle rate)으로 사용되기도 한다. 왜냐하면 SML상의 기대수익률과 β와의 관계는 투자사업의 체계적 위험(β)에 상응하는 요구수익률이 얼마인지를 나타내기 때문이다. 따라서 이 요구수익률(k)을 투자사업의 예상수익률(IRR)과 비교하여 투자사업의 경제적 타당성을 평가할 수 있게 된다.

[예 제]

무위험이자율(R_f)이 8%이고, 시장 포트폴리오의 기대수익률 $E(R_m)$이 16%이다. 지금 A 기업이 베타가 1.3이고 예상 IRR이 19%인 투자사업의 착수를 검토하고 있다. 이 투자사업에 대한 요구수익률은 얼마이며, 이 투자사업은 채택해야 하는가?

㉠ 이 투자사업의 요구수익률(거부율)

$$k = R_f + [E(R_m) - R_f) \cdot \beta$$

$$= 0.08 + (0.16 - 0.08) \cdot 1.3 = 0.184$$

㉡ 이 투자사업의 예상 IRR 19%는 요구수익률(거부율) 18.4%보다 높으므로 경제적 타당성을 지닌다.

4) 공공요금의 결정

정부투자기관과 같은 공공기관에서의 요율결정은 경제에 미치는 영향이 적지 않으므로 중요한 사안이 되고 있다. 전기료, 통신료, 고속도로 통행료 수준을 결정할 때 중요한 것은 공공성을 고려하여 최소한의 요율을 결정하는 것이다. CAPM에서 최소한의 요구수익률을 추정할 수 있으므로 CAPM은 공공요금결정(utility rate-making case)에 활용되기도 한다.

예를 들어 어느 정부투자기관에서 1,000억 원을 투자하여 베타가 0.6인 사업을 벌인다고 가정하자. 무위험이자율이 6%, 시장위험보상율이 8%라고 하면 이 기관이 투자사업을 통하여 벌어들여야 하는 최소한의 요구수익률은 0.06 +

0.8(0.6) = 0.108이 된다. 따라서 1,000억 원의 투자에 대하여 10.8%가 되는 108억 원이 공정이익이 된다. 이 정도의 이익이 나도록 요율을 결정하는 것이 타당한 것이다.

5) 투자성과평가(performance evaluation)

투자자 자신이나 펀드매니저들에 대한 투자성과를 평가하는 것은 포트폴리오 관리활동의 중요한 부분이다. 투자성과를 평가할 때는 부담하였던 위험수준을 반드시 감안하여야 하는데 CML이나 SML은 포트폴리오위험 수준에 상응하는 적정수익률을 나타내므로 이들은 투자성과평가의 기준이 된다.

제3장 연습문제

1. (주)실명의 기대수익률은 12%, 베타계수는 1.0이다. 반면에 (주)지하의 기대수익률은 13%, 베타계수는 1.5이다. 시장지수의 기대수익률이 11%이고 무위험이자율이 5%일 때 CAPM에 따르면 두 주식 중 어느 주식이 더 좋은 매입대상인가? 기대되는 초과수익의 정도를 근거로 하여 답하라. 그리고 이를 그림으로 나타내어라.

2. 아래에 주어진 자료에 근거하여 물음에 답하라.

주식 j	주식 j와 M과의 상관계수(ρ_{jm})	j수익률의 표준편차(σ_j)
1	0.3	0.4
2	0.8	0.3

시장기대수익률 $E(R_m)$ = 0.11

무위험이자율 R_f = 0.06

시장수익률의 분산 σ^2_m = 0.25

① 주식1과 주식2의 베타(β_j)를 구하라.

② 주식1에 60%, 주식2에 40% 투자하여 구성되는 포트폴리오의 베타 (β_P)를 구하라.

③ CAPM에 의하면 주식1과 주식2의 균형기대수익률은 얼마인가?

④ ②에서 구성된 포트폴리오의 균형기대수익률을 계산하라.

⑤ 주어진 자료로부터 SML을 도출하고 이를 그림으로 표시하라. 주식1, 주식2와 ②의 포트폴리오는 어디에 위치하는가?

⑥ 주식1과 2의 증권특성선(CL)을 그림으로 표시하라.

3. 주식 A의 수익률(R_A)과 시장수익률(R_m)이 다음과 같이 예상되었다. 무위험이자율(R_f)은 4%이다.

상 황	확 률(P_i)	R_A	R_m
Ⅰ	0.2	0.30	0.18
Ⅱ	0.4	0.10	0.15
Ⅲ	0.3	0.25	0.10
Ⅳ	0.1	-0.05	-0.10

① 자본시장선(CML)의 관계식을 도출하라.
② 증권시장선(SML)의 관계식을 도출하고 이를 도시하라.
③ 주식 A의 베타(β_A)를 계산하고, 주식 A에 대한 요구수익률을 추정하라.
④ 주식 A가 과대평가되었는지 과소평가되었는지를 평가하라.

4. 토빈(Tobin)의 분리정리(separation theorem)에 대해서 설명하라.

[해 답]

1. CAPM에 의하여 추정되는 기대수익률을 초과하는 정도(초과수익률 α)에 의해서 평가한다.(그림은 생략함)

$\alpha = E(R) - [R_f + \beta E(R_{m)} - R_f)]$

α(실명) $= 0.12 - [0.05 + 1.0(0.11 - 0.05)] = 0.01 = 1\%$

α(지하) $= 0.13 - [0.05 + 1.5(0.11 - 0.05)] = -0.01 = -1\%$

2. ① $\beta_1 = \frac{(0.3)(0.4)}{0.5} = 0.24$ $\beta_2 = \frac{(0.8)(0.3)}{0.5} = 0.48$

② $\beta_p = 0.6(0.24) + 0.4(0.48) = 0.336$

③ $E(R_1) = 0.06 + 0.24(0.11 - 0.06) = 0.072$

$E(R_2) = 0.06 + 0.48(0.11 - 0.06) = 0.084$

④ $E(R_p) = 0.06 + 0.336(0.11 - 0.06) = 0.0768$

⑤,⑥ 그림은 생략

3. $E(R) = 0.17$ $E(R_m) = 0.116$

① $E(R_A) = R_f + \dfrac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m}\sigma_A$

$= 0.04 + \dfrac{0.116 - 0.04}{0.0061}\sigma_A$

$= 0.04 + 12.459\sigma_A$

② 그림은 생략함

$E(R) = R_f + [E(R_m) - R_f]\beta_A$

$= 0.04 + [0.\ 116 - 0.04]\beta_A$

$= 0.04 + 0.0\ 76\beta_A$

③ $\beta_A = \dfrac{\sigma_{Am}}{\sigma_m^2} = 0.836$

$E(R_A) = 0.04 + 0.076 \times 0.836 = 0.10354$

④ 0.10354 < 0.17(즉, 요구수익률<기대수익률)이므로 과소평가

4. 설명생략

제4장 단일지표모형에 의한 포트폴리오선택

1. 단일지표모형의 필요성

마코위츠의 완전공분산모형의 핵심은 일정한 포트폴리오 기대수익률에서 투자위험을 최소화시키는 효율적 분산투자에 관한 것이었다. 마코위츠 모형에서 적절한 위험 측정치로 사용되는 것은 분산 혹은 표준편차이었는데, 구체적으로 n종목으로 구성되는 포트폴리오위험을 식(4-1)과 같이 측정하였다.

$$Var(R_P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (4\text{-}1)$$

그러나 이 마코위츠모형을 현실적으로 포트폴리오 투자결정에 사용하는 데는 투입정보의 계산량이 방대하다는 문제점이 있다. 마코위츠 모형에 의하면 n종목으로 포트폴리오를 구성할 때, 계산에 필요한 정보량은 다음과 같다.

개별주식의 기대수익률 : n개　　　　개별주식의 분산 : n개
개별주식 간의 공분산 : n(n-1)/2개

예를 들어, 우리나라 증권시장에 존재하는 약 700종목으로 구성되는 포트폴리오 위험

을 구하기 위해서는 700개의 분산과 (700×699)/2 = 244,650개의 공분산 계산이 필요하다. 더욱이 최종적인 효율적 포트폴리오(투자선)를 구하기 위해서는 투자비율이 달라질 때 얻게 되는 수없이 많은 가능한 포트폴리오를 대상으로 포트폴리오 분산을 측정하여 이에 대하여 기대수익률을 극대화시키는 포트폴리오를 찾아야 한다. 따라서 그 계산량은 상상을 초월한 방대한 양이 된다. 그래서 마코위츠 모형은 이론적으로는 공분산 메트릭스만 정확히 추정된다면 효율적 투자선을 찾아내는 가장 완벽한 방법이지만, 현실적으로 적용하기에는 어려운 기술적 문제점을 지니고 있다. 마코위츠 모형의 기술적 문제점을 해결하고자 한 것이 바로 샤프의 단일지표모형이다. 단일지표모형(single index model)은 n종목의 개별주식들 간의 모든 공분산을 고려하는 대신에 어느 특정 개별주식과 시장전체의 움직임을 나타내는 단일시장지표와의 공분산만을 고려한 단순화된 모형이다. 이러한 의미에서 단순시장모형(simplified market model) 또는 시장모형(market model)이라고도 부른다. 이하에서 이 모형의 가정과 의미를 자세히 살펴보기로 한다.

2. 증권특성선

마코위츠 모형에 의한 포트폴리오 구성방법이 지니는 기술적 문제점을 극복하고 현실적으로 유용성이 높은 포트폴리오 구성방법을 마련하기 위해서 단일지표모형에서는 증권수익률의 움직임에 대한 몇 가지 가정을 하고 있다.

가. 투자수익률 변동의 두 원천

포트폴리오 위험을 보다 간단히 구하기 위해서 단일지표모형에서는 증권투자수익의 변동성이 기본적으로 두 가지 원천에 의해서 초래된다는 것을 전제로 하고 있다. 그 하나는 시장전체 공통요인(common factor)의 변동에 연관된 부분이고 다른 하나는 시장전체와 연관되지 않고 개별기업 고유요인(company specific factor)에 의해서 발생되는 부분이라는 것이다. 즉,

개별증권 가격변동 = 시장전체(공통요인)에 연관된 가격변동
+ 개별기업 고유요인에 연관된 가격변동

이 가정은 일정기간에 있어서 어느 개별증권의 투자수익률에 영향을 주는 사건에는 두 가지 유형이 있음을 뜻한다. 첫째, 거시적 사건(macro event)으로서, 예를 들면 기대하지 못했던 인플레이션, 공금리의 변화, 정국의 불안정, 석유와 같은 주요 원자재 가격의 변화 등을 들 수 있다. 이와 같은 유형의 사건은 그 영향력이 광범위하여 정도의 차이만 있을 뿐이지 거의 모든 증권에 영향을 미친다. 결과적으로 주가의 전반적인 수준에 변동을 초래하여 시장 전체의 수익률에 대한 변동을 가져온다. 개별증권의 가격변동은 이와 같은 시장전체의 공통적인 요인에 대하여 민감도(sensitivity)의 차이가 있을 뿐 시장공통요인으로부터 영향을 받는다. 둘째, 모든 종목에 전반적인 영향을 주지 않는 특정기업의 미시적 사건(micro event)이다. 예를 들어 특정기업의 신제품개발, 제품의 갑작스런 진부화, 노사분규, 공장의 화재와 조업중단, 핵심인물의 이직이나 변고 등의 사건을 말한다. 이와 같은 미시적 사건은 다른 종목들의 가격에는 영향을 주지 않고 특정종목에만 영향을 미치는 사건이므로 시장전체(포트폴리오)수익률에는 영향을 미치지 않고 그 특정 개별종목의 투자수익률의 변동에만 영향을 끼친다. 이처럼 증권수익률의 변동을 이분법적으로 구분할 수 있고, 전자인 시장공통요인은 종합주가지수와 같은 시장지표(market index)로 나타낼 수 있다고 가정하여 이 개념을 1차적인 관계식으로 표시한 것이 단일지표모형, 시장모형인 것이다.

나. 증권특성선

단일지표모형은 일반적으로 식(4-2)과 같이 표시되는데 증권 j의 수익률을 단 하나의 공통요인인 시장수익률과 선형적인 관계를 갖는 것으로 표시한다.

$$R_{jt} = \alpha_j + \beta_j R_{mt} + \varepsilon_{jt} \qquad (4\text{-}2)$$

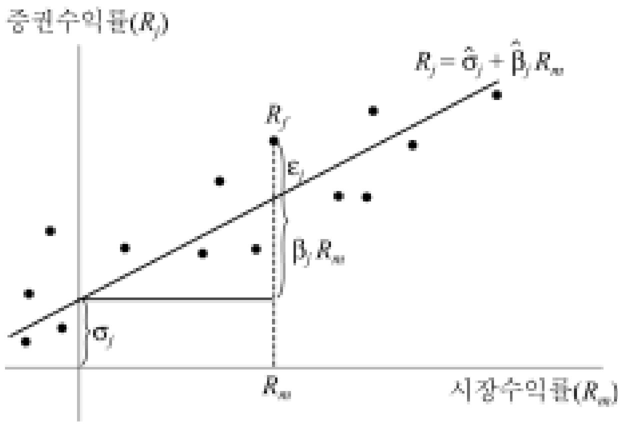
단, R_{jt} : t시점에서의 주식의 수익률(확률변수) ε_{jt} : 잔차항

R_{mt} : t시점에서의 시장지표의 수익률(확률변수) α_j : 회귀계수 절편

β_j : 회귀계수 기울기

단일지표모형에서는 $Cov(R_m,\ \varepsilon_j)=0$과 $Cov(\varepsilon_j,\ \varepsilon_k)=0$을 가정한다. 또한 잔차의 기대값은 영($E(\varepsilon_j)=0$)이다. 단일지표모형을 그림으로 나타내면 [그림 18]과 같다. 이 그림의 각 점들은 수직축에 어느 개별주식 j의 수익률(R_j)을 종속변수로, 그리고 수평축에 시장전체 수익률을 대표하는 시장지표(종합주가지수)의 수익률(R_m)을 독립변수로 하여 대응시킨 것이다.

[그림 18] 단일지표모형 : 증권특성선



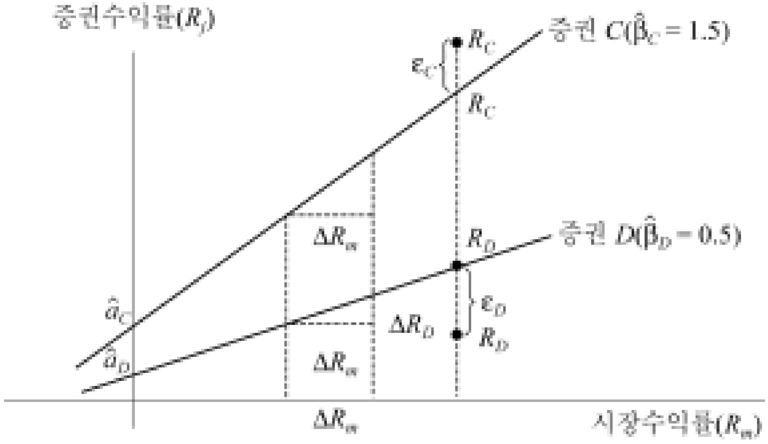
여기서 R_j를 R_m에 관하여 회귀분석(regression)하면 [그림 18]에서 보는 것처럼 양자 사이의 관계를 나타내는 다음과 같은 회귀식을 구할 수 있다.

$$\widehat{R}_j = \widehat{\alpha}_j + \widehat{\beta}_j R_m \tag{4-3}$$

단, ^는 회귀계수 추정치

이 회귀분석에서 추정되는 회귀계수들은 증권의 수익률과 위험에 관한 특성을 나타내므로 식(4-3)을 증권특성선(CL : characteristic line)이라고 부른다. 식(4-2)으로 표시되는 단일지표의 가정은 [그림 18]에서의 회귀분석에서 보다 잘 이해될 수 있다. 특정주식 j의 특정시점 t에서의 수익률 R_{jt}의 한 부분은 시장수익률의 움직임에 따라 변동하는 $\beta_j R_{mt}$로 구성되어 있다. 여기서 중요한 것은 기울기 β_j로서 이는 시장수익률의 변동에 대한 증권 j의 수익률의 평균적인 민감도(average sensitivity to market movement)를 나타낸다. 즉, 시장전체의 수익률에 영향을 주는 거시적 사건이 발생했을 때 특정주식이 이에 대하여 얼마나 민감하게 반응하는가 하는 것은 기업마다 다른데, 이를 계량적으로 측정한 것이 β계수이다. 또한 이 β계수는 CAPM의 β계수와 수학적으로 정의가 같다. 기울기 베타(β_j)의 특성을 보다 명료하게 이해하기 위해 [그림 19]에 표시되어 있는 증권 C와 증권 D의 예를 보기로 하자. 여기서 증권 C의 증권특성선의 기울기는 1.5이다. 반면에 증권 D의 증권특성선의 기울기는 0.5이다. 이제 시장수익률 R_m이 일정한 폭으로 변동할 때 각 증권수익률이 서로 다르게 변동함을 볼 수 있다. 만약 시장수익률 R_m이 10%만큼 증감하면 증권 C의 수익률은 평균적으로 15%만큼 증감하게 된다. 한편 증권 D의 수익률은 시장수익률이 10% 증감이 있을 때 5%만큼 증감하게 된다. 기울기 베타계수(β_j)는 시장수익률의 변동분에 대한 특정증권수익률의 변동분의 비율을 표시한 것이다. 베타계수가 큰 증권일수록 시장수익률의 변동(거시적 사건의 발생)에 보다 민감하게 반응함을 볼 수 있다.

[그림 19] 증권특성선



특정주식의 수익률 R_{jt} 를 구성하는 다른 한 부분은 [그림 18]과 [그림 19]에서 주식 j 수익률의 증권특성선으로부터의 수직적 거리로 측정되는 잔차부분 ε_{jt} (ε_c, ε_D)이다. 잔차항 ε_{jt}는 t기간 중 주식 j의 실제 수익률 R_{jt} 과 t기간 중 시장수익률 R_{mt} 과 증권특성선에 기초하여 구해지는 추정기대수익률과의 차를 의미한다

$$\begin{aligned}\varepsilon_{jt} &= R_{jt} - \widehat{R_{jt}} \\ &= R_{jt} - (\hat{\alpha}_j + \hat{\beta}_j R_{mt})\end{aligned} \tag{4-4}$$

단, ε_{jt} : 주식 j의 t시점에서의 잔차

R_{jt} : 주식 j의 t시점에서의 실제수익률

$\hat{\alpha}$: 증권특성선의 절편 추정치

$\hat{\beta}$: 증권특성선의 기울기 추정치

R_{mt} : 시장수익률의 t시점에서의 실제수익률

여기서 추정 기대수익률은 R_{jt} 중에서 시장 전체의 변동에 의하여 설명될 수 있는 부분이고, 잔차 ε_{jt}는 시장변동에 기인하지 않는 증권수익률의 변동을 나타낸다. 즉, 잔차 ε_{jt}는 시장전체의 변동과는 관계없이 특정기업의 고유한 미시적 사건에 의해서 영향을 받는 증권수익률의 변동을 측정한 것이다. 단일지표모형을 이용할 때 주의할 점이 있는데 다음의 몇 가지 가정이 충족되어야 한다는 점이다. 가장 중요한 것은 어느 두 주식(j와 k)의 잔차수익률 사이의 공분산이 영이라는 가정이다. 즉, $Cov(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0$ 이다. 환언하면 어느 특정 j주식에 영향을 주는 미시적 사건은 다른 k주식에는 영향을 주지 않는다는 가정이다. 그러면 두 주식 모두에 영향을 미치는 요인은 시장요인 밖에 없으므로 개별주식 j와 k와의 공분산 $Cov(R_j, R_k)$은 시장요인과의 관계에서 설명될 수 있는데, 구체적으로 시장수익률의 분산에 각각의 베타를 곱하여 구해진다.

$$Cov(R_j, R_k) = \beta_j \beta_k \sigma^2(R_m) \qquad (4\text{-}5)$$

다. 베타계수의 추정

[그림 18]에서 주식j의 수익률(R_j)과 시장수익률(R_m)을 대응시킬 때 이들 양자의 관계를 가장 잘 대표하는 직선(best fitted line), 즉 증권특성선은 그림의 모든 점들로부터의 거리(잔차)의 합을 최소로 하는 최소자승법(OLS : ordinary least square)을 이용하여 기울기(β)와 절편(α)을 다음과 같이 추정함으로써 구해진다.

$$\widehat{\beta}_j = \frac{\Sigma\,[R_{jt} - E(R_j)][R_{mt} - E(R_m)]}{\Sigma\,[R_{mt} - E(R_m)]^2} = \frac{Cov(R_j, R_m)}{\sigma^2(R_m)} \qquad (4\text{-}6)$$

$$\widehat{\alpha} = \overline{R} - \widehat{\beta}_j \overline{R_m} \qquad (4\text{-}7)$$

여기서 구해지는 단일지표모형의 β는 CAPM의 베타계수와 본질적으로 같으며 다만 차이점은 CAPM의 이론적 시장포트폴리오(market portfolio) 대신 단일지표모형에서는 실제 관찰이 가능한 시장지표(종합주가지수)를 사용한다는 점이다.

3. 단일지표모형에 의한 포트폴리오 선택

단일지표모형에서 증권의 특성이라고 제시되는 베타(β)계수가 어떻게 포트폴리오 선택의 새로운 기준이 될 수 있으며 왜 베타에 의해서 위험이 측정되고 이를 포트폴리오 선택 기준으로 삼으면 마코위츠 모형과 비교하여 훨씬 계산량과 시간이 절약되는 실용적인 포트폴리오 투자결정을 할 수 있는가를 알아보자

가. 단일지표모형에 의한 포트폴리오 분산측정

(1) 체계적 위험과 비체계적 위험

증권투자수익률이 시장전체의 공통요인과 개별기업 고유요인 두 가지 원천에 의하여 영향을 받는 것을 가정하면 앞서 제시한 대로 단일지표모형과 증권특성선은 다음과 같다.

$$R_{jt} = \alpha_j + \beta_j \cdot R_m + \varepsilon_{jt} \qquad (4\text{-}2)$$

$$E(R_j) = \alpha_j + \beta_j E(R_m) \qquad (4\text{-}8)$$

이제 단일지표모형에서 수익률의 변동성을 나타내는 분산을 구하기 위해서 본래의 분산을 측정하는 식(4-9)에 식(4-2)과 식(4-8)을 대입하여 보면 식(4-10)의 관계식을 얻게 된다.

$$\sigma^2(R_j) = E[R_j - E(R_j)^2] \qquad (4\text{-}9)$$

$$\sigma^2(R_j) = \beta_j^2 \sigma^2(R_m) + \sigma^2(\varepsilon_j) \qquad (4\text{-}10)$$

단, $\sigma^2(R_j)$: 증권수익률의 분산
β_j : 시장모형에서 추정되는 기울기, 베타계수
$\sigma^2(\varepsilon_j)$: 잔차항의 분산

이 식은 증권수익률의 분산을 베타와의 관계에서 표현한 것으로, 우변 첫째 항 $\beta^2_j \sigma^2(R_m)$은 투자의 체계적 위험(systematic risk)이 되며 수많은 주식에 분산 투자된 시장지수포트폴리오의 분산(위험)에 연동된 특정주식의 변동성을 나타낸다. 즉, 개별주식의 위험 중에서 시장전체와 연동된 위험의 크기를 나타낸 것으로서 개별주식 수익률의 총변동성 중에서 증권특성선상을 따라 움직이는 수익률 변동부분인 것이다. 식(4-10)의 우변 둘째 항 $\sigma^2(\varepsilon_j)$은 잔차분산 혹은 비체계적위험(residual variance, unsystematic risk)이라고 부른다. 잔차분산 $\sigma^2(\varepsilon_j)$는 시장전체 변동성에 관련되지 않는 주식 j의 고유한 특성에서 야기되는 위험으로서 개별주식 수익률의 총변동성 중에서 증권특성선으로부터의 편차의 크기로 측정되는 수익률의 변동부분이다.

(2) 포트폴리오 분산과 베타와의 관계

단일지표모형에 의할 때 개별증권의 분산(위험)이 체계적 위험과 비체계적 위험으로 나뉘어 측정되고, 베타와 관련하여 측정될 수 있음을 보았다. 이 같은 관계는 개별증권뿐 아니라 포트폴리오의 경우에도 그대로 성립하므로 다음과 같이 포트폴리오분산을 표시할 수 있게 된다.

$$\sigma^2(R_P) \;=\; \beta^2_P \sigma^2(R_m) + \sigma^2(\varepsilon_P) \qquad (4\text{-}11)$$

우변의 첫째 항은 시장공통요인에 연동된 포트폴리오의 체계적 위험이고, 둘째 항은 비체계적 위험이다. 포트폴리오의 베타(β_p)와 잔차분산($\sigma^2(\varepsilon_j)$)이 개별증권의 특성치의 함수로 표시될 수 있다면 이렇게 표시된 β_p와 $\sigma^2(\varepsilon_j)$을 이 식에 대입해 봄으로써 포트폴리오분산(위험) 측정이 간단해질 수 있다.

① 포트폴리오 베타

포트폴리오 베타(β_p)는 특정포트폴리오 수익률(R_p)과 시장수익률(R_m)과의 공분산을 시장수익률의 분산($\sigma^2(R_m)$)으로 나눈 것이다.

$$\beta_P = \frac{Cov(R_P, R_m)}{\sigma^2(R_m)} \tag{4-12}$$

한편 $Cov(R_P, R_m) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot Cov(R_j, R_m)$이므로 이 식의 양변을 $\sigma^2(R_m)$으로 나누면 다음의 포트폴리오 베타(β_p)를 구하는 관계식을 얻게 된다.

$$\beta_P = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j \tag{4-13}$$

이 식에서 보면 포트폴리오 베타(β_p)는 포트폴리오를 구성하는 개별주식의 베타계수(β_j)를 그 주식에 대한 투자비율에 따라 가중평균한 것이다.

② 포트폴리오 잔차분산

포트폴리오 잔차분산은 아래 식(4-14)처럼 개별증권의 잔차분산에 그 증권에 대한 투자비율의 자승을 곱한 것이 된다.

$$\sigma^2(\varepsilon_P) = \sum_{j=1}^{n} w_j^2 \sigma^2(\varepsilon_j) \tag{4-14}$$

(3) 단일지표모형과 포트폴리오 선택

단일지표모형의 가정 하에서 포트폴리오 분산 $\sigma^2(R_p)$는 식(4-11)과 같이 표시된다. 그런데 포트폴리오 베타 β_p와 포트폴리오 잔차분산 $\sigma^2(\varepsilon_p)$은 식(4-13)과 식(4-14)로 표시되므로 이들 식을 식(4-11)에 대입하면 단일지표모형에 의한 포트폴리오 분산 $\sigma^2(R_p)$을 구하는 식(4-15)가 최종적으로 얻어진다.

$$\sigma^2(R_P) = \beta_P^2 \sigma^2(R_m) + \sigma^2(\varepsilon_P) \tag{4-11}$$

$$\beta_P = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j \tag{4-13}$$

$$\sigma^2(\varepsilon_P) = \sum_{j=1}^{n} w_j^2 \sigma^2(\varepsilon_j) \tag{4-14}$$

$$\sigma^2(R_P) = (\sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j)^2 \sigma^2(R_m) + \sum_{j=1}^{n} w_j^2 \sigma^2(\varepsilon_j) \tag{4-15}$$

단일지표모형에 의해 포트폴리오 분산(Rp)을 구하는 식(4-15)는 전장에서 설명한 마코위츠 모형과 함께 최소분산포트폴리오(GMVP)를 찾아낼 때 위험의 측정치로 사용할 수 있는 것이다. 식(4-15)에 의하여 포트폴리오분산을 측정하는데 다시 말하여, 단일지표모형의 이용하여 포트폴리오를 구성하는데 필요한 계산량은

개별주식의 기대수익률 : n개	개별주식의 베타계수 : n개
개별주식의 잔차분산 : n개	시장수익률의 분산 : 1개

가 되어 총 추정치는 (3n+1)개가 됨을 보여주고 있다. 이는 마코위츠 모형과 비교하여 볼 때 단일지표모형이 훨씬 계산량과 시간이 절약되는 실제 사용 가능한 유효한 모형이 됨을 알 수 있다.

(4) 마코위츠 모형과 단일지표모형의 비교

마코위츠 모형이나 샤프의 단일지표모형은 모두 투자자가 효율적 분산투자를 하는데 필요로 하는 최소분산포트폴리오를 구성하는데 필요한 모형들이다. 두 모형의 차이는 최소분산포트폴리오를 찾는 과정에서 포트폴리오분산을 결정하는 방법에 있다. 먼저 두 모형의 가정상의 차이를 보면 마코위츠 모형은 증권수익률의 형성과정이나 증권들 간의 공분산에 관한 일체의 가정을 필요로 하지 않는다. 따라서 계산의 정확성 면에서 완벽하다. 반면에 단일지표모형은 모든

증권들 간의 공분산을 단 하나의 공통요인인 시장요인에 민감한 부분과 그렇지 않은 부분으로 나누는데, 후자의 잔차분산은 증권 간에 상관성이 없음을 가정하고 있으므로, 이 가정의 현실성 여하에 따라서 단일지표모형은 최적 포트폴리오의 선택모형으로서의 정확성이 좌우된다. 이상에서의 설명을 종합하여 단일지표모형에 의한 포트폴리오선택방법과 마코위츠 모형에 의한 선택방법을 비교하면 <표 8>과 같다.

〈표 8〉 단일지표모형과 마코위츠 모형의 비교

	샤프의 단일지표모형	마코위츠 모형
① 기대수익률	$E(R_j)=\alpha_j+\beta_j E(R_m)$	$E(R_j)=\Sigma p_i r_i$
② 개별증권의 분산	$\sigma^2(R_j)=\beta_j^2\sigma^2(R_m)+\sigma^2(\varepsilon_j)$	$\sigma^2(R_j)=E[R_j-E(R)]^2$
③ 증권 i와 j간의 공분산	$Cov(R_i, R_j)=\beta_i\beta_j\sigma^2(R_m)$	$Cov(R_i, R_j)=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$
④ 포트폴리오의 분산	$\sigma_p^2=\beta_p^2\sigma^2(R_m)+\sigma^2(\varepsilon_p)$ $=[\Sigma w_j\beta_j]^2\sigma^2(R_m)$ $+\Sigma w_j^2\sigma^2(\varepsilon_j)$	$\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$ $=\sum_{j=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$
⑤ 포트폴리오의 잔차분산	$\sigma^2(\varepsilon_p)=\Sigma w_j^2\sigma^2(\varepsilon_j)$ $\varepsilon_{jt}=R_{jt}-(\alpha_j+\beta_j R_{mt})$	$\sigma^2(\varepsilon_p)=\Sigma w_j^2\sigma^2(\varepsilon_j)$ $+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ *

* 시장모형의 가정 $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$ 이 전제되지 않을 경우의 잔차분산임

이제 두 모형의 차이를 다음 예제를 통해서 보기로 하자.

[예 제] 주식 A, B에 대한 자료가 다음과 같다

주 식	베 타 (β_j)	잔차분산 $\sigma^2(\varepsilon_j)$
A	0.875	0.10
B	1.125	0.15

* 시장수익률의 분산 $\sigma^2(R_m) = 0.40$

* 주식 A, B 잔차분산 간의 공분산 $Cov(\varepsilon_A, \varepsilon_B) = 0.10$

위의 자료를 이용하여 단일지표모형의 가정 하에서

㉠ 주식 A와 B의 분산과 양 주식 간의 공분산 $Cov(R_A, R_B)$을 구하라.

㉡ 주식 A와 B에 50%씩 균등한 금액을 투자한 포트폴리오의 베타, 잔차분산과 분산을 구하라.

㉢ 단일지표모형의 가정이 전제되지 않을 경우 이 포트폴리오 분산을 구하고 ㉡의 결과와 비교하라.

㉠ 주식 A와 B의 분산과 공분산

$$\sigma^2(R_A) = \beta_A^2 \sigma^2(R_m) + \sigma^2(\varepsilon_A) = (0.875)^2(0.40) + 0.10 = 0.40625$$

$$\sigma^2(R_B) = \beta_B^2 \sigma^2(R_m) + \sigma^2(\varepsilon_B) = (1.125)^2(0.40) + 0.15 = 0.65625$$

$$Cov(R_A, R_B) = \beta_A \beta_B \sigma^2(R_m) = (0.875)(1.125)(0.40) = 0.3938$$

㉡ 단일지표모형에 의한 포트폴리오의 베타, 잔차분산과 분산

$$\beta_p = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j = \left(\frac{1}{2}\right)(0.875) + \left(\frac{1}{2}\right)(1.125) = 1.0$$

$$\sigma^2(\varepsilon_p) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 \sigma^2(\varepsilon_j) = \left(\frac{1}{2}\right)^2(0.1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2(0.15) = 0.0625$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma^2(R_m) + \sigma^2(\varepsilon_p) = (1.0)^2(0.40) + 0.0625 = 0.4625$$

㉢ 단일지표의 가정이 전제되지 않을 경우 포트폴리오의 잔차분산과 분산

$$\sigma^2(\varepsilon_p) = \Sigma w_j^2 \sigma^2(\varepsilon_j) + \Sigma\Sigma\, w_i w_j Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2(0.1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2(0.15) + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(0.10) = 0.1125$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2(0.4063) + \left(\frac{1}{2}\right)^2(0.6563) + 2(0.5)(0.5)(0.3938) = 0.4626$$

㉡의 결과와 차이가 있는 것은 단일지표모형의 가정처럼 $Cov(\varepsilon_A, \varepsilon_B) = 0$이 아니고 $Cov(\varepsilon_A, \varepsilon_B) \neq 0$이기 때문이다

4. 단일지표모형의 응용

가. 지수펀드(Index Fund)

앞에서 설명한 단일지표모형은 뮤츄얼펀드(mutual fund) 등의 자금운용에 적절히 활용되고 있다. 일반투자자를 대신하여 증권투자를 전문적으로 운용하는 기능을 수행하고 있는 투자신탁이나 뮤츄얼펀드 등에서는 과소평가된 증권을 식별하여 초과수익을 크게 하고자 하는 적극적 투자관리를 시도하기도 하지만, 부담하는 투자위험에 상응하는 투자수익만을 확보하고자 하는 소극적 투자관리를 시도하기도 한다. 소극적 투자관리의 한 방법으로는 지수펀드(index fund)를 설정하여 운용하는 것이다. 지수펀드는 종합주가지수에 나타나는 시장 전체의 평균적 수익률 정도만을 얻도록 펀드를 구성하는 것이다. 시장평균수익률을 확보하는 원시적인 방법으로는 종합주가지수에 편입되는 종목 그대로 펀드를 구성하는 방법이 있으나, 수많은 종목을 일정기간마다 사고 파는 데는 거래비용이나 관리비용이 엄청나게 소요되므로 이는 실제적으로 거의 불가능하다. 뿐만 아니라, 개별종목 시가총액 구성비율이 수시로 바뀌므로 엄밀한 의미에서 시장평균수익률을 확보하는 것이 불가능하다. 따라서 보다 간편한 방법이 요구되는데, 그 한 방법은 종목의 수를 줄이면서 그 포트폴리오의 베타(β_p)가 1이 되도록 하는 것이다. 베타가 1이 되면 시황변동이 있더라도 평균적으로 종합주가지수의 수익률을 추적할 수 있기 때문이다. 그러나 포트폴리오 베타가 1이더라도 포트폴리오 잔차분산이 크면 시장평균수익률은 추적하지 못할 가능성이 높아진다. 따라서 우수한 지수펀드를 만드는데 더욱 중요한 것은 포트폴리오잔차분산($\sigma^2(\varepsilon_p)$)이 가능한 최소가 되도록 하는 것이다. 잔차분산이 최소화될수록 시장평균수익률을 정확히 추적할 수 있는 확률이 높아지기 때문이다.

요약하면 시장펀드의 구성은 다음 식들의 관계를 충족시키는 포트폴리오 투자결정의 문제가 된다.

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sigma^2(\varepsilon_p) = \Sigma\, w_j^2 \sigma^2(\varepsilon_j) \\
\text{s.t} \quad & \beta_p = \Sigma\, w_j \beta_j = 1.0 \\
& \Sigma\, w_j = 1.0
\end{aligned}
$$

나. 베타계수의 예측과 추정베타의 조정기법

포트폴리오 구성에 있어 원하는 위험도와 수익률을 선택하는 것은 포트폴리오의 베타계수를 선택하는 것과 동일한 문제이다. 베타계수를 추정하는 가장 손쉬운 방법은 단일지표모형을 이용하여 과거의 데이터인 일정기간 동안의 증권수익률과 시장수익률의 자료를 회귀시켜 베타를 추정하는 것이다. 이렇게 얻어진 베타를 역사적 베타라고 하며 그 유용성 때문에 현실적으로 투자결정에 많이 활용되고 있다. 그러나 이 역사적 베타는 현실적으로 시간이 지남에 따라 안정적이지 못하므로 미래의 투자 분석에 사용하기가 곤란한 문제를 안고 있다. Blume(1971)은 개별기업의 베타가 시간의 경과에 따라 시장 전체의 베타인 1에 회귀하는 성향 때문에 불안정적인 것처럼 보인다고 주장하였으며 다른 학자들은 시간이 경과함에 따라 기업의 경영특성과 위험이 변동하기 때문에 베타계수가 달라진다고 주장한다. 그 논리야 어찌 되었던 베타계수가 시기별로 불안정하게 변동한다면 역사적 베타계수를 그대로 이용할 수 없으며 적절한 방법으로 수정할 필요가 있다. 다음은 수정기법의 예이다.

① Blume의 베타 조정기법

② 메릴・린치의 조정베타

$$\text{조정베타} = \text{표본베타}\left(\frac{2}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right)$$

③ 바시섹의 베타조정기법

④ 기업특성변수를 고려한 기본적베타의 추정: Hamada(1969), BARRA모형

다. 다지표모형(Multi-Index Model)

단일지표모형은 공통요인으로서 시장지표 하나만을 포함시키고 있기 때문에 증권수익률의 움직임을 충분히 설명치 못하는 면이 있다. 잔차항 간의 공분산이 가정과는 달리 영이 아니다($Cov(\varepsilon_j, \varepsilon_k) \fallingdotseq 0$)라는 실증적 증거가 이를 말해준다. 이는 모형에 다른 공통요인을 포함시키는 것이 필요함을 의미한다. 따라서 단일지표모형의 단점을 보완하는 한 방법으로 다지표모형의 이용이 고려될 수 있다. 다지표모형(multi-index model)은 증권수익률의 변동을 두 개 이상의 공통요인(common factor)과의 공분산관계에서 파악하는 모형이다. 단일지표모형에서는 증권수익률의 변동을 유일한 공통요인으로 시장지수라는 단일지표(single index)와의 선형적 관계에서 설명하고자 하는 모형이었지만, 다지표모형에서는 증권수익률이 시장지수이외에도 경제의 산업생산성장률, 물가상승률, 통화증가율, 유가변화율 등의 공통요인의 변화에 따라 민감하게 변동한다고 본다. 일반적으로 어느 증권 j의 수익률이 k개의 다수공통요인(multi common factor)과의 공분산 관계에서 설명될 수 있다면 다지표모형은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$R_j = \alpha_{j1} + \beta_{j1}F_1 + \beta_{j2}F_2 + \beta_{j3}F_3 + \cdots\cdots + \beta_{jk}F_k + \varepsilon_j \qquad (4\text{-}16)$$

단, F_k : 공통요인 k(k는 요인의 수) β_{jk} : 증권 j의 k공통요인에 대한 민감도

α_{jk} : 요인 이외의 요소에 의해 결정되는 수익률 ε_j : 잔차항

이와 같은 다지표모형이 성립하기 위해서는 앞에서 설명한 단일지표모형에서의 가정과 마찬가지로 $Cov(F_j, F_k)=0$, $Cov(F_k, \varepsilon_j)=0$, 및 $Cov(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0$의 가정이 필요하며 $E(\varepsilon_j)=0$이다.

제4장 연습문제

1. 단일지표모형의 가정 하에서 답하시오. 시장지수의 표준편차는 26%이다.

주 식	기대수익률(%)	베 타	잔차분산
A	14	0.6	(0.32)2
B	25	1.3	(0.37)2

① 두 주식의 표준편차는 각각 얼마인가?

② 다음과 같은 투자비율로 포트폴리오를 구성하려고 한다.

주식 A : 0.33 주식 B : 0.38 국공채 : 0.29 (R_f = 9%)

이 포트폴리오의 기대수익률, 베타, 비체계적 위험 및 분산을 구하시오.

2. 다음 자료에 답하시오.

주 식	시장(M)과의 상관계수	표준편차	가중치
A	0	0.1	0.4
B	0.5	0.2	0.6

주식 A와 B의 상관계수는 0.5이고, 시장(M)지수의 표준편차는 0.1이다.

① 주식 A와 B의 베타는 얼마인가?

② 단일지표모형 가정 하에서 A와 B의 공분산은 얼마인가?

③ 마코위츠 모형 하에서 A와 B의 공분산은 얼마인가?

④ 마코위츠 모형 하에서 포트폴리오의 위험(분산)은 얼마인가?

⑤ 단일지표모형 하에서 포트폴리오의 위험(분산)은 얼마인가?

3. 다음 자료에 나타난 증권 A와 B에 1/2씩 투자하여 포트폴리오를 구성하였다.

증 권	β_i	잔차분산	분 산
A	0.5	0.04	0.0625
B	1.5	0.08	0.2825

① 포트폴리오 베타(β_P)는 얼마인가?
② 단일지표모형의 가정 하에서 포트폴리오의 잔차분산을 구하라.
③ 단일지표모형의 가정 하에서 포트폴리오의 분산을 구하라.
④ 시장수익률의 분산이 0.0016이라고 가정하고 다음 표의 공란(베타, 체계적 위험, 비체계적 위험)을 완성하라.

증권 i	분산 (σ^2_i)	증권 i와 시장수익률과의 상관관계(ρ_{im})	베타 (β_i)	체계적 위험	비체계적 위험
i=1	0.006	0.9			
i=2	0.006	0.3			
i=3	0.006	0.0			

4. 다음은 베타추정에 관한 문제이다.
① β(베타)를 추정할때 과거수익률자료(역사적 정보)를 이용하여 추정하는 방법을 설명하고 이와 같은 추정방법이 지니는 문제점에 대해서 논하라.
② 베타의 불안정성은 왜 초래되는가 ?
③ 기본적 베타(fundamental beta)란 무엇인가 ?

[해 답]

1. ① 개별증권의 표준편차를 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_j = (\beta_j^2 \sigma_m^2 + \sigma^2_{\varepsilon_j})^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta_A = 0.6\ ,\quad \beta_B = 1.3\ ,\quad \sigma(\varepsilon_A) = 0.32\ ,\quad \sigma(\varepsilon_B) = 0.37\ ,\quad \sigma_m = 0.26$$

$$\therefore\quad \sigma_A = (0.6^2 \cdot 0.26^2 + 0.32^2)^{\frac{1}{2}} = 0.356$$

$$\sigma_B = (1.3^2 \cdot 0.26^2 + 0.37^2)^{\frac{1}{2}} = 0.5011$$

② $E(R_p) = w_A \cdot E(R_A) + w_B \cdot E(R_B) + w_{R_f} \cdot R_f$

$= (0.33)(0.14) + (0.38)(0.25) + (0.29)(0.09) = 0.1673$

$\beta_p = w_A \cdot \beta_A + w_B \cdot \beta_B + wW_{R_f} \cdot \beta_{R_f}$

$= (0.33)(0.6) + (0.38)(1.3) + (0.29)(0) = 0.692$

$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \cdot \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2$, 여기서 $\sigma_{\varepsilon_p}^2$: 비체계적위험

그런데 $\sigma_{\varepsilon_p}^2 = w_A^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_A}^2 + w_B^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_B}^2 + w_{R_f}^2 \cdot \sigma_{\varepsilon_f}^2$

$= 0.33^2 \cdot 0.32^2 + 0.38^2 \cdot 0.37^2 + 0 = 0.0309$

$\therefore \sigma_p^2 = 0.692^2 \cdot 0.26^2 + 0.0309 = 0.0633$

2. ① $\beta_A = \dfrac{0(0.1)(0.1)}{(0.1)^2} = 0$, $\beta_B = \dfrac{(0.5)(0.2)(0.1)}{(0.1)^2} = 1$

② $\sigma_{AB} = \beta_A \beta_B \sigma_m^2 = (0)(1)(0.1)^2 = 0$

③ $\sigma_{AB} = \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B = (0.5)(0.1)(0.2) = 0.01$

④ $\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{AB}$

$= (0.4)^2 (0.1)^2 + (0.6)^2 (0.2)^2 + 2(0.4)(0.6)(0.01) = 0.0208$

⑤ $\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + w_A^2 \sigma_{\varepsilon_A}^2 + w_B^2 \sigma_{\varepsilon_B}^2$ 그런데 $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$

$\therefore \sigma_{\varepsilon_A}^2 = \sigma_A^2 - \beta_A^2 \sigma_m^2 = (0.1)^2 - (0)^2 (0.1)^2 = 0.01$

$\sigma_{\varepsilon_B}^2 = \sigma_B^2 - \beta_B^2 \sigma_m^2 = (0.2)^2 - (1)^2 (0.1)^2 = 0.03$

그리고 $\beta_p = (0.4)(0) + (0.6)(1) = 0.6$

$\therefore \sigma_p^2 = (0.6)^2 (0.1)^2 + (0.4)^2 (0.01) + (0.6)^2 (0.03) = 0.016$

3. ① $\beta_p = 1/2(0.5) + 1/2(1.5) = 1.0$

② $\sigma_{(\varepsilon)}^2 = (1/2)^2 (0.04) + (1/2)^2 (0.08) = 0.03$

③ 증권 A에서 $0.0625 = (0.5)^2 \sigma(R_m)^2 + 0.04$

(또는 증권 B에서 $0.2825 = (1.5)^2 \sigma(R_m)^2 + 0.08$)이므로 $\sigma(R_m)^2 = 0.09$)

$\therefore \sigma(R_p)^2 = (1.0)^2 (0.09) + 0.03 = 0.12$

④ 증권1. $\beta_1 = \frac{\rho_{1m}\sigma(R_1)}{\sigma(R_m)} = \frac{(0.9)(0.077)}{0.04} = 1.73$

체계적위험 $= \beta_1^2\sigma(R_m)^2 = (1.73)^2(0.0016) = 0.0048$

비체계적위험 $= \sigma(R_1)^2 - \beta_1^2\sigma(R_m)^2 = 0.006 - 0.0048 = 0.0012$

증권2. $\beta_2 = 0.581$ 체계적위험$= 0.0005$ 비체계적위험$= 0.0055$

증권3. $\beta_3 = 0.000$ 체계적위험$= 0.0000$ 비체계적위험$= 0.0060$

제5장 차익거래 가격결정이론(APT)

제1절 금융감독관련기관 개관

현재까지의 주요 실증적 검증결과에 의하면, CAPM은 현실의 자산가격의 움직임을 충분히 설명하지 못하고 있다. 또한 Roll에 의하면, 진정한 시장포트폴리오를 알지 못하는 한 이의 검증이 불가능하다. 따라서 자산가격의 결정을 적절하게 설명해 줄 수 있고 또 실증적 검증이 가능한 새로운 이론의 필요성이 대두되었다. 특히 CAPM에서는 투자자들이 평균・분산기준에 의해 의사결정을 하는 것으로 가정하는데 이를 위해서는 효용함수가 2차 함수거나 수익률이 정규분포를 가진다는 매우 엄격한 가정이 필요하다. S. A. Ross(1976)의 차익거래 가격결정이론(Arbitrage Pricing Theory; APT)은 자본자산가격결정이론에 대한 하나의 검증 가능한 대안으로써 제시되었다. CAPM은 자산수익률은 하나의 단일공통요인인 시장포트폴리오 수익률과 선형관계를 갖는다고 정의한다. APT도 이와 유사한 직관적 통찰에 기초하고 있으나 CAPM보다 더 일반성을 갖는다. APT는 자산의 수익률이 k개의 “공통요인”의 영향을 받아 변동하고 차익거래 해소의 조건이 충족될 때의 가격을 균형가격으로 설명한다.

2. 차익거래의 의의와 활용

시장에서 동일한 자산이 서로 다른 가격으로 거래될 경우(또는 동일한 가격으로 거래되고 상이한 수익률을 나타낼 경우), 높은 가격의 자산을 공매하고 그 수익으로 낮은 가격의 자산을 매입함으로서 투자액과 위험의 추가적 부담이 없이 항상 (+)의 이익을 얻어내는 차익거래(arbitrage)가 가능하다. 현실적으로 이러한 차익거래의 기회가 일시적으로 존재할 수는 있지만 지속적으로 존재할 수는 없다. 한편 균형을 더 이상의 차익거래가 일어나지 않는 상태로 정의할 때 즉, 수요공급변화에 따른 가격조정을 통해 차익거래기회가 완전히 해소되었을 때 관찰되는 가격(수익률)이 균형가격(수익률)이다. 이와 같이 차익거래가 해소된 상태가 균형의 조건이라고 생각할 수 있으며, 이를 "차익거래 해소의 조건(no-arbitrage condition)"이라고 한다.

<차익거래의 예 1> 가격이 같으나 모든 상태에서 수익이 우월한 경우

동일한 가격을 갖는 세 가지 주식이 있고 동일한 발생확률을 갖는 세 가지의 미래상태가 있다고 가정하자. 이때 이들 주식의 상태별 수익률이 다음과 같다.

주 식	불경기	정상경기	호경기
A	15%	20%	25%
B	10%	25%	35%
C	25%	20%	15%
P(=0.5B+0.5C)	17.5%	22.5%	25%
차익	2.5%	2.5%	0%

여기서 개별주식 간에 우열비교는 곤란하지만 B와 C로 구성한 P는 미래의 어떤 상황에서도 주식 A보다 높은 수익률을 가져다준다. 따라서 다음과 같은 과정을 통하여 차익거래가 가능하다.

① P를 1,000만원 어치 매입하고 A를 1,000만원 어치 공매(short selling: 차입개념으

로 이해)할 경우 투자액은 0인 반면 모든 상태에서 양의 차익을 얻을 수 있다.(차익거래기회 존재)

② 물론 이 경우, 주식 A에 대하여 초과공급이 발생 ⇒ 가격하락 ⇒ 수익률 상승, 포트폴리오 P에 대하여 초과수요 발생 ⇒ 가격상승 ⇒ 수익률 하락

③ 주식 A와 포트폴리오 P를 구성하는 주식들의 가격은 더 이상의 차익거래를 허용하지 않는 수준으로 조정되면서 균형회복(차익거래 기회의 해소)

<차익거래의 예 2> 동일한 수익률을 제공하는 두 자산의 가격이 다른 경우

현재 삼송전자의 주가가 1만원이고, 1년 후 만기가 되는 삼송전자 주식의 선물주가는 10,500원, 연간 무위험이자율 10%인 경우에는 다음과 같은 차익거래가 가능하다.

① 10,500원에 삼송전자 주식선물(forward) 1주 매입 (no cash outflow)

② 삼송전자 주식 1주를 공매 (1만원 cash inflow)

③ 은행에 1만원 저축 (cash outflow, 이자율 10%)

⇒ 아무런 투자액 없음. 즉“부의 변화가 없어야 한다”는 차익거래조건을 만족

1년후 주가	P > 10,500	P = 10,500	P < 10,500
은행저축	11,000원	11,000원	11,000원
거래손익	(P −10,500)	(P −10,500)	(P −10,500)
현물거래 결제자금	−P	−P	−P
순손익	500원	500원	500원

위와 같은 과정을 통해 1년 후 11,000원을 은행에서 찾아 삼송전자 1주를 10,500원을 내고 산후 이 주식으로 공매거래 상계함으로써 무위험 순이익 500원을 얻을 수 있다(추가적 위험부담이 없어야 한다는 차익거래조건 만족). 균형을 위해서는 현재주가가 10,500/1.1 = 9,545.5원이거나 선물주가가 11,000원이었어야 한다. (과대평가 주식의 매도에 의해 차익거래 가능)

▶ 참 고

주식을 이미 1주 가지고 있는 경우의 차익거래는?

- 공매할 필요 없이 동 주식을 팔고 나머지 거래를 동일하게 실행.
- 1년 후 부는 P+500원. 즉, 1주는 여전히 가지고 있고 어떠한 경우이든 500원의 이익 발생.

3. 요인모형(factor model)

요인모형이란 자산의 수익률이 어떤 공통요인의 영향을 받아서 변동한다고 보는 수익생성모형이다. 이 모형은 예컨대 GNP 성장률, 이자율, 인플레, 통화량, 유가, 시장포트폴리오 수익률 등의 몇 가지 중요한 공통요인의 영향으로 수익률이 변동한다고 본다. 우리가 이미 살펴본 CAPM은 시장포트폴리오의 수익률을 공통요인으로 하는 단일요인모형인 셈이다.

가. 단일요인모형

요인모형의 가장 단순한 경우로서 자산수익률에 영향을 미치는 공통요인이 1개인 경우를 말한다. CAPM의 경우도 시장포트폴리오의 수익률을 공통요인으로 하는 단일지수모형의 한 예이다. 다음의 예를 통해 이를 설명해보자. 주식시장의 수익률이 하나의 공통요인인 GNP 성장률의 영향을 받아 움직인다고 하자. 투자자들의 GNP 성장률의 기대치는 7% 정도이며 이 기대치하에서 주식 a의 기대수익률이 $E(R_a)$=18%라고 가정하자. 그런데 현실적으로 경제는 불확실하며 GNP 역시 불확실하다. 그러므로 실제의 GNP 성장률은 GNP 성장률의 기대치에 기대치 이외의 변동(F)을 고려한 값이 될 것이고 실제 자산 a의 수익률은 기대수익률에 공통요인 변동의 영향과 주식 a의 고유한 오차항을 고려하여 결정되는 값이 될 것이다. 수익률 R_a가 F에 대하여 1.5의 민감도를 갖고 변동할 경우 위의 예는 다음과 같은 식으로

표현될 수 있다.

$$R_a = E(R_a) + \beta_a F + \varepsilon_a \quad (5\text{-}1)$$
$$= 0.18 + 1.5\,F + \varepsilon_a$$

단, R_a : 주식 a의 수익률(확률변수) $E(R_a)$: 주식 a의 기대수익률
F : GNP 성장률의 기대 밖의 변동을 나타내는 공통요인(확률변수)
β_a : 공통요인 F에 대한 주식 a의 민감도
ε_a : 오차항. 주식 a의 고유요인의 변동에 기인한 수익률 변동

단일요인모형의 일반식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_j = E(R_j) + \beta_j F + \varepsilon_j \quad (5\text{-}2)$$

F : 공통요인. 거시 변수의 기대 밖의 변동 β_j : 공통요인 F에 대한 자산 j의 민감도
ε_j : 오차항. 자산 j의 고유의 요인

위 식에서 공통요인이나 오차항이 아무런 변동성을 보이지 않고 0의 값을 취한다면, 자산 j는 $E(R_j)$의 기대수익률을 확실하게 가져다 줄 것이다. 그러나 공통요인이나 오차항이 확률변수이므로 자산 j의 수익률 또한 기대수익률로부터 편차를 갖게 되며, 따라서 위험을 갖게 된다. 자산 j의 위험의 크기인 분산은 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_j^2 = \beta_j^2 \sigma_F^2 \ + \ \sigma^2(\varepsilon_j) \quad (5\text{-}3)$$

이 식은 CAPM 모형에서와 마찬가지로 어떤 자산의 총위험(σ_j^2)이 체계적 위험 ($\beta_j^2\sigma_F^2$)과 비체계적 위험($\sigma^2(\varepsilon_j)$)으로 이루어져 있음을 보여준다.

나. 다요인모형 (multi-factor model)

현실적으로 자산의 수익률은 한 가지 요인이 아니라 여러 가지 거시적 요인의 영향을 받는다. 여러 가지의 공통요인을 고려하는 특수한 경우로서, 자산들의 수익률 변동에 영향을 미치는 요인이 2개라고 하자. 이 경우 자산 j의 수익률은 다음과 같은 2요인 모형에 의해 표현될 수 있다.

$$R_j = E(R_j) + \beta_{j1}F_1 + \beta_{j2}F_2 + \varepsilon_j \qquad (5\text{-}4)$$

단, β_{j1} 및 β_{j2} : 공통요인 F1 및 F2에 대한 민감도

만일 K가지의 요인을 고려하는 경우는 다음과 같이 K요인 모형으로 표현될 것이다.

$$R_j = E(R_j) + \beta_{j1}F_1 + \ldots + \beta_{jK}F_K + \varepsilon_j \qquad (5\text{-}5)$$

이때 자산 j의 분산은 다음과 같다.

$$\sigma_j^2 = \beta_{j1}^2\sigma_{F_1}^2 + \ldots + \beta_{jK}^2\sigma_{F_k}^2 + \sigma^2(\varepsilon_j) \qquad (5\text{-}6)$$

위 식에서 공통요인이 서로 독립적이라는 것을 가정하여 공통요인간의 공분산은 0으로 가정하고 있다. 또한 자산 j의 총위험 중 비체계적 위험은 충분한 분산투자에 의해 제거될 수 있다.

4. 차익거래 가격결정이론(APT)의 도출

APT는 CAPM과 같은 엄격한 가정을 필요로 하지 않으며 다만 투자자들이 보다 큰 부를 선호하며 위험회피적이며, 자산의 수익률은 다요인모형에 따른다는 매우 현실성있는 가정에 기초하고 있다 여기서 투자자들이 보다 큰 부를 선호한다는 가정은 차익거래기회가 존재한다면 투자자들이 차익거래를 통해 보다 큰 부를 얻으려 할 것이라는 것을 의미한다. 그리고 투자자들이 위험회피적이라는 가정은 충분한 분산투자를 통해 체계적 위험만을 부담하게 될 것이라는 것을 의미한다. APT는 차익거래해소의 조건을 충족하는 균형상태에서 자산의 기대수익률이 어떻게 결정될 것인지를 설명하는 이론이다. 이를 이행하기 위해 이하에서는 먼저 충분히 분산투자된 포트폴리오를 이용한 차익거래 방법을 설명하고 APT를 도출해 본다.

가. 포트폴리오를 이용한 차익거래

충분한 분산투자를 통해 포트폴리오를 구성하는 경우에 투자자들은 비체계적 위험은 부담하지 않고 체계적 위험만을 부담할 것이므로 고유요인(ε_p)은 수익률을 결정하는 모형에서 무시할 수 있을 것이다. 따라서 충분히 분산된 포트폴리오 P의 요인모형과 위험은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\text{요인모형 : } R_P = E(R_P) + \beta_P F$$
$$\text{위 험 : } \sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_F^2 \quad (5\text{-}7)$$

① 포트폴리오를 이용한 차익거래 1 : 동일한 베타의 경우

충분히 분산투자된 포트폴리오는 비체계적 위험이 0이므로 체계적 위험만을 제거함으로써 위험이 없는 차익거래 이윤을 얻을 수 있다. 충분히 분산투자된 두 개의 포트폴리오 A와 B가 있다고 하자. A와 B의 기대수익률은 각각 21%와

19%이고 공통요인에 대한 민감도는 1.5로 동일하다고 하면 요인모형은 다음과 같이 표시된다.

$$R_A = E(R_A) + \beta_A F = 0.21 + 1.5F \quad (5\text{-}8)$$

$$R_B = E(R_B) + \beta_B F = 0.19 + 1.5F \quad (5\text{-}9)$$

그러나 위의 요인모형을 비교해 보면 동일한 위험을 갖는데도 불구하고 서로 다른 기대수익률을 가지고 있음을 알 수 있다. 이때 A가 보다 높은 기대수익률을 제공하므로 다음과 같은 무위험차익거래가 가능하다.

포트폴리오 A의 매입	(0.21 + 1.5F) × 1억원
포트폴리오 B의 공매	−(0.19 + 1.5F) × 1억원
차익거래 이윤	(0.02 + 0.0F) × 1억원 = 200만원

물론 이러한 차익거래 기회가 지속적으로 존재할 수 없다. 위와 같은 차익거래가 계속되면 B의 초과공급으로 인해 B의 가격이 하락(기대수익률 상승)하고 A의 초과수요로 A의 가격이 상승(기대수익률 하락)할 것이기 때문이다. 따라서 A와 B의 기대수익률이 같게 되어 차익거래 기회가 해소되고 균형이 성립하게 될 것이다.

② 포트폴리오를 이용한 차익거래 2 : 서로 다른 베타의 경우

앞의 예와 달리 체계적 위험이 서로 다른 경우(서로 다른 베타)에도 무위험 차익거래가 가능하다. 예를 들어 포트폴리오 P는 21%의 기대수익률과 1.5의 민감도를 가지며 포트폴리오 Q는 17%의 기대수익률과 0.5의 민감도를 가지고 있다고 하자. 또한 무위험이자율은 12%라 가정하자. 이 경우 요인모형은 다음과 같다.

$$R_P = E(R_P) + \beta_P F = 0.21 + 1.5F \tag{5-10}$$

$$R_Q = E(R_Q) + \beta_A F = 0.17 + 0.5F \tag{5-11}$$

포트폴리오 P의 경우 공통요인 한 단위의 민감도에 대하여 6%((21-12)/1.5)의 위험프리미엄이 주어지며, Q의 경우는 공통요인 한 단위의 민감도에 대하여 10%((17-12)/0.5)의 위험프리미엄이 주어진 셈이다. 무위험차익거래를 위하여 우선 포트폴리오 P와 무위험자산에 일정비율을 투자하여 체계적 위험이 포트폴리오 Q와 같도록 조정하는 과정이 필요하다. 이를 위해 이제 (1/3)P + (2/3)(무위험자산)로 구성된 포트폴리오 C를 구성해 보자. 이 새로운 포트폴리오 C의 베타값과 기대수익률은 다음과 같다.

$$\beta_C = 1.5(1/3) + 0(2/3) = 0.5 = \beta_Q = 0.5$$

$$E(R_C) = 21\%(1/3) + 12\%(2/3) = 15\% \ < \ E(R_Q) = 17\%$$

- 무위험 차익거래 : 포트폴리오 C를 3억원 공매(P를 1억원 매도하고, 무위험자산을 2억원 차입)하고 이 대금으로 Q를 3억원 매입.

포트폴리오 Q의 매입:	(0.17 + 0.5F) × 3억원
포트폴리오 C의 공매: {-(0.21+1.5F)×1억}+{-(0.12+0.0F)×2억}=-(0.15+0.5F)×3억원	
차익거래 이윤	(0.02 + 0.0F) × 3억원 = 600만원

이러한 차익거래는 투자액이 0이고 β값이 0이므로 위험이 없는 거래이다. (비체계적 위험은 이미 포트폴리오를 구성함으로써 분산된 것으로 가정한다.)

나. 차익거래 가격결정이론 : 단일요인의 경우

위의 예에서 Q에 대하여는 초과수요가 일어나 가격이 상승하고 기대수익률이 하락한다. 그리고 C에 대하여는 초과공급이 일어나 가격이 하락하고 기대수익률이 상승하게 된다. 이 결과 두 포트폴리오의 기대수익률이 같아질 때 차익거래기회가 해소되어 균형이 달성된다. 이러한 균형상태는 충분히 분산투자된 모든 포트폴리오들에 대하여 1단위의 체계적 위험에 대하여 동일한 크기의 위험프리미엄(= λ)이 주어질 때 달성된다. 이 경우 무위험차익거래에 의하여 0의 차익거래 이윤이 얻어지므로 다음과 같은 차익거래 해소조건이 된다.

$$\frac{E(R_P)-R_f}{\beta_P}=\frac{E(R_Q)-R_f}{\beta_Q}=\lambda \tag{5-12}$$

단, λ : 1단위의 체계적 위험(β)에 대한 위험프리미엄

위 식으로부터 충분히 분산투자된 포트폴리오 P의 경우 식 (5-13)이 성립함을 알 수 있다.

$$E(R_P)=R_f+\lambda\beta_P \tag{5-13}$$

즉 포트폴리오 P의 균형시장에서 얻게 되는 기대수익률은 무위험수익률에 위험프리미엄에 베타를 곱한 값을 더하여 결정된다. 이는 단일요인만을 고려하는 경우의 APT이다. 이 단일요인 APT는 CAPM과 유사하나, 베타의 의미가 다르다. CAPM의 경우 베타는 시장포트폴리오에 대한 민감도를 의미하지만 APT에서 β_P는 어떤 공통요인 F에 대한 민감도를 의미한다. 한편, 위의 단일요인 APT는 충분히 분산투자된 포트폴리오에 대하여 성립할 뿐만 아니라 개별 자산 j의 경우에도 성립하여야 한다. 즉, $E(R_j)=R_f+\lambda\beta_j$가 성립하여야 한다. 만약 $E(R_j)=R_f+\lambda_j\beta_j$

이고 $\lambda_j \geq \lambda$ 라면 자산 j를 보다 많이 포함한 포트폴리오를 구성하고 이를 활용하여 무위험 차익거래가 가능하기 때문이다.

다. 다요인 차익거래 가격결정이론

다요인 모형에 의해 APT를 도출하는 과정은 단일요인 APT를 도출하는 경우와 거의 유사하다. 단, 다요인 APT에서는 여러 가지의 공통요인을 고려하여야 하므로 요인 포트폴리오의 개념을 우선 이해해야 한다.

(1) 요인 포트폴리오(factor portfolio)

요인 포트폴리오란 충분히 분산투자된 포트폴리오로서, 어떤 특정한 공통요인에 대해서는 1의 민감도(베타계수)를 갖고 있고 다른 모든 공통요인에 대해서는 0의 민감도를 갖고 있는 포트폴리오를 말한다. 따라서 공통요인의 수만큼의 요인 포트폴리오가 존재할 수 있다. 2요인 모형의 경우에는 요인 1 포트폴리오와 요인 2 포트폴리오의 두 가지 요인 포트폴리오가 존재할 것이다. 구체적으로 무위험수익률이 12%이고 두 개의 요인 포트폴리오의 요인모형이 다음과 같이 주어져 있다고 하자.

- 요인 1 포트폴리오

$$R_{F1} = E(R_{F1}) + 1 \cdot F_1 = 0.15 + 1 \cdot F_1 \tag{5-14}$$

단, R_{F1} : 요인 1 포트폴리오의 수익률

- 요인 2 포트폴리오

$$R_{F2} = E(R_{F2}) + 1 \cdot F_2 = 0.17 + 1 \cdot F_2 \tag{5-15}$$

단, R_{F2} : 요인 2 포트폴리오의 수익률

위의 두 개의 요인 모형에서 요인 1 포트폴리오의 기대수익률이 15%라는 것은 F1에 대하여 1의 체계적 위험(베타계수)을 부담함으로서 3%의 위험 프리미엄이 주어진다는 것을 말하며 F2에 대하여 1의 체계적 위험(베타계수)을 부담함으로서 5%의 위험 프리미엄이 주어진다는 것을 의미한다. 일반적으로, 균형상태에서 어떤 k번째 공통요인에 대하여 1의 베타계수를 부담함으로써 투자자가 얻는 위험 프리미엄은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\lambda_k = \frac{E(R_{Fk}) - R_f}{\beta_{Fk}} = E(R_{Fk}) - R_f \qquad (5\text{-}16)$$

단, $E(R_{Fk})$: 요인 k 포트폴리오의 균형적 기대수익률 R_f : 무위험수익률

따라서 위의 요인 1 포트폴리오와 요인 2 포트폴리오의 위험 프리미엄을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lambda_1 = E(R_{F1}) - R_f = 0.15 - 0.12 = 0.03$$

$$\lambda_2 = E(R_{F2}) - R_f = 0.17 - 0.12 = 0.05$$

(2) 다요인 APT

이제 충분히 분산 투자된 포트폴리오 P가 두 개의 공통요인 F1과 F2에 대해 0.8 및 1.4의 베타계수를 갖고 있을 때 이 포트폴리오의 기대수익률이 어느 정도이어야 하는가를 알아보자. 우선 이 포트폴리오의 요인모형은 다음과 같다.

$$R_P = E(R_P) + 0.8F_1 + 1.4F_2 \qquad (5\text{-}17)$$

앞의 두 개의 요인 포트폴리오에서 공통요인 F1과 F2에 대해 1단위의 체계적 위험을 부담함으로써, 투자자들이 얻는 위험 프리미엄은 각각 3%와 5%이었다. 따라서 포트폴리오 P의 경우 적절한 위험 프리미엄의 크기는 다음과 같을 것이다.

$$\beta_{P1}\text{에 대한 위험프리미엄} : \lambda_1\beta_{P1} = (0.03)(0.8) = 0.024$$
$$+\ \beta_{P2}\text{에 대한 위험프리미엄} : \lambda_2\beta_{P2} = (0.05)(1.4) = 0.07$$

$$\text{포트폴리오 P의 위험프리미엄} : \lambda_1\beta_{P1} + \lambda_2\beta_{P2} = 0.024 + 0.07 = 0.094$$

그리고 균형상태에서 포트폴리오 P의 기대수익률은 위의 단일모형의 경우처럼 1단위의 체계적 위험에 대하여 동일한 크기의 위험프리미엄(= λ)이 주어져야 하므로 다음과 같다.

· 2요인 APT :
$$E(R_P) = R_f + [E(R_{F1}) - R_f]\beta_{P1} + [E(R_{F2}) - R_f]\beta_{P2}$$
$$= R_f + \lambda_1\beta_{P1} + \lambda_2\beta_{P2} \qquad (5\text{-}18)$$

따라서 충분히 분산 투자된 포트폴리오 P의 기대수익률은

$$E(R_P) = 0.12 + (0.03)(0.8) + (0.05)(1.4) = 0.214$$

가 되고 포트폴리오 P의 요인 모형은

$$R_P = 0.214 + 0.8F_1 + 1.4F_2$$

가 되어야 한다. 그런데 만약 포트폴리오 P의 기대수익률이 위와 같이 21.4%가 아니라면 차익거래가 가능하다. 예를 들어 포트폴리오 P의 기대수익률이

18%라고 하자. 그러면 포트폴리오 P의 요인모형은 다음과 같이 표시된다.

$$R_P = 0.18 + 0.8F_1 + 1.4F_2 \tag{5-19}$$

이 경우 아래와 같은 과정을 통해 무위험 차익거래가 가능할 것이다.

① P를 1억원 공매
② 요인 1 및 요인 2 포트폴리오 8천만원과 1억 4천만원 매입
③ 무위험수익률로 1억 2천만원 차입 (2억 2천만원−1억원)

포트폴리오 P의 공매	:	- [0.180 + 0.8F_1 + 1.4F_2] × 1억원
요인 1 포트폴리오의 매입	:	[0.150 + 1.0F_1 + 0.0F_2] × 8억만원
요인 2 포트폴리오의 매입	:	[0.170 + 0.0F_1 + 1.0F_2] × 1억4천만원
무위험수익률로 차입	:	[0.120 + 0.0F_1 + 0.0F_2] × 1억2천만원
차익거래이윤	:	- [0.015454 + 0.0F_1 + 0.0F_2] × 2.2억원=340만원

즉, 2요인 APT의 경우, $E(R_P) = R_f + \lambda_1\beta_{P1} + \lambda_2\beta_{P2}$ 의 관계가 성립하지 않으면 위의 예처럼 차익거래기회가 발생하게 된다.

따라서 K개의 요인을 고려하는 APT의 일반식을 표현하면 다음과 같다.

$$E(R_j) = R_f + \lambda_1\beta_{j1} + \ldots + \lambda_K\beta_{jK}$$

$$= R_f + [E(R_{F_1}) - R_f]\beta_{j1} + \ldots + [E(R_{F_K}) - R_f]\beta_{jK} \tag{5-20}$$

단, $E(R_{F_K})$: k번째 공통요인(F_K)에 대해서만 1의 민감도를 갖고 있고 다른 모든 공통 요인에 대해서는 0의 민감도를 갖는 요인 k 포트폴리오가 균형상태에서 갖는 기대수익률

이미 설명한 바와 같이 현실적으로는 엄격한 의미의 무위험자산이란 존재하지 않는다. 이 경우에는 다음과 같이 모든 공통요인에 대한 민감도(베타계수)가 0인 포트폴리오를 무위험자산 대신 사용할 수 있다.

$$E(R_j) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{j1} + \ldots + \lambda_K \beta_{jK} \tag{5-21}$$

단, λ_0는 충분히 분산된 포트폴리오로서 모든 공통요인에 대한 민감도(β_{0k})가 0인 포트폴리오의 기대수익률

라. APT가 성립되기 어려운 경우

다음과 같은 경우에는 차익거래가 용이하지 않다.

① 포트폴리오 구성을 위한 거래비용이 많이 소요되는 경우 (공통요인이 많을수록 거래비용은 증가할 것이다.)

② 주식선물 등 원하는 만기와 금액의 상품이 존재하지 않을 경우

③ 공매가 어려울 경우

④ 무위험 차입 또는 대출이 어렵거나 금리차가 있을 경우

5. 차익거래 가격결정이론의 실증적 검증

가. 요인분석(factor analysis)을 이용한 연구

APT의 현실적 설명력을 검증하기 위한 대표적인 연구로 Roll과 Ross(1980)의 연구가 있다. 이 연구는 주식의 일간 수익률 자료를 이용하여 다음과 같은 절차에 의해 이루어졌다.

① 주식수익률 간 공분산 행렬을 구한다.

② 요인분석에 의해 공분산 행렬로부터 주요 요인(F_i)을 식별(통계적 의미를 가질 뿐 어떤 경제적 변수인지는 구분 불능)해낸 후, 각 주식의 주요요인에 대한 민감도(요인계수 : factor loading) β_{jk}를 추정한다.

$$\Rightarrow R_j = a + \beta_{j1} F_1 + \beta_{j2} F_2 + \varepsilon_j$$

③ 각 주식의 평균수익률을 요인계수에 대하여 회귀시켜 각 요인의 위험프리미엄 λ_k의 크기와 유의성을 측정한다.

$$\Rightarrow E(R_j) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{j1} + \ldots + \lambda_K \beta_{jK}$$

이 연구에서도 사용하고 있는 요인분석은 실증적 검증에서 흔히 사용되는 통계적 기법이다. 하지만 이 요인분석은 일정수준 이상의 설명능력을 갖는 공통요인의 수를 알아내는 데 있어서는 유용한 방법이지만 그 공통요인이 갖는 구체적인 경제적 의미를 해석하지 못한다는 한계점을 갖는다.

<검증사례>

① R. Roll & S. A. Ross(1980) : 공통요인의 수가 3개 또는 4개 정도. APT가 유의하게 설명. 그러나 공통요인의 경제적 의미를 해석하지 못함.

② 류인순(1986) : 1976년 7월~1984년 6월의 월간 수익률 자료(155개 주식)와 1978년 1월 ~ 1983년 12월의 주간수익률 자료(199개 주식) 이용. 공통요인의 수가 3 내지 5개. 공통요인은 종합주가지수, 위험프리미엄의 변화, 산업생산지수 연간 증가율 등

나. 다변량 회귀분석을 이용한 연구

다요인 APT를 검증하는 다른 하나의 방법은 미리 중요하다고 판단되는 공통요인을 정의해 놓고 APT의 현실적 타당성을 검증하는 방법으로 다음의 세 단계에 의한다.

① 공통요인의 정의 : 중요한 거시적 요인들(F_k)을 미리 선정한다.

② 요인 포트폴리오의 구성 : 특정 주요요인에 대한 1의 상관계수를 갖고 다른 요인에 대해서는 0의 상관계수를 갖는 충분히 분산된 포트폴리오를 구성한다.

③ 각 주식의 요인 포트폴리오에 대한 민감도(즉, β_k)를 구하고, 주식 또는 포트폴리오 수익률을 베타계수로 회귀분석을 실시한다.

<검증사례> N. Chen, R. Roll & S. A. Ross(1986)는 다음의 공통요인을 식별.

- 주식의 위험프리미엄 결정요인으로써 ① 제조업 생산지수의 변동(MP) ② 채권의 위험프리미엄의 변동(UPR) ③ 인플레이션의 기대밖의 변동(UI) 등이 중요함을 실증

제6장 증권시장의 효율성 : 개념과 실증

1. 효율적 시장의 개념

가. 효율적 시장가설

효율적 시장(efficient market)이란 본래 전통적인 경제학에서 사회전체의 효용이 극대화되도록 자원의 배분이 효율적으로 이루어지는 시장의 의미로 사용되었다. 그런데 경제학적 의미에서 자원의 배분이 효율적으로 이루어져 완전시장(perfect market)이 실현되기 위해서는 배분효율성과 운영효율성이 전제되어야 한다고 보고 있다. 그러나 증권시장에서 말하는 효율적 시장의 효율성은 좁은 의미에서 정보효율성(informational efficiency)을 가리키는데 증권가격이 모든 정보를 신속・정확・충분히 반영하는 것을 뜻한다. 증권시장이 효율적이라면 증권가격의 변화는 다음과 같은 특성을 보일 것이다.

① 각 시점에서의 증권가격변동은 무작위적(random)이어야 한다. 즉 과거시점의 가격변화와 현재시점의 변화와는 상관관계가 없다.

② 증권가격은 증권의 가치평가에 관련된 새로운 정보가 발생하면 이에 대해 신속하고 정확하게 반응한다.

③ 어느 시점에서 이용 가능한 정보에 기초한 투자전략이나 거래규칙(trading rule)을 수립했을 때 평균투자수익률 이상의 투자성과를 획득할 수 없다.

④ 특정정보를 알고 있는 투자자들과 모르고 있는 투자자들의 평균적인 투자성과 사이에는 의미 있는 차이가 없다. 만약 투자성과의 차이가 존재한다면 전혀 우연적인 것이며, 주가에 반영되지 않은 정보를 발견하는 능력면에서의 차이도 체계적이고 영속적인 차이를 보일 수 없다.

이처럼 증권가격이 이용 가능한 모든 정보를 신속・정확・충분하게 반영하고 있다는 주장을 효율적 시장가설(EMH : efficient market hypothesis)이라고 한다. 이와 같은 효율적 시장이 현실적으로 성립할 수 있는 것은 실제 증권시장에서 정보는 다음과 같은 현실적 측면을 지니고 있기 때문이다. 첫째는 어느 특정증권의 가치에 영향을 주는 정보는 사전에 예측할 수 없게 무작위로 발표되고 있다. 둘째는 증권시장에는 독립적으로 투자수익을 극대화시킬 목적으로 증권정보를 경쟁적으로 입수하여 분석하려는 수많은 증권전문가들이 존재한다. 셋째는 수많은 증권전문가들의 경쟁적인 정보입수와 분석활동 때문에 새로운 정보는 그때마다 증권가격에 단시간 내에 반영된다.

나. 효율적 시장가설(EMH)의 형태

증권시장의 효율성의 문제는 엄격하게 효율적이냐 아니면 비효율적이냐의 이분법적인 구분이 될 수 없는 상대적인 것이다. 즉, 증권시장의 효율성은 증권가격이 어떤 종류의 정보를 신속히 반영하고 있느냐에 따라 효율성의 정도를 상대적으로 평가해야 할 성질의 것이다. 효율적 시장가설(EMH)은 투자자가 어떤 정보를 이용하여 초과수익을 얻을 수 있느냐에 따라 증권시장의 효율성에 상대적 차이가 있다고 보고 다음과 같이 세 가지 형태로 나누어진다.

(1) 약형 효율적 시장가설

약형 효율적 시장가설(weak form EMH)이란 현재의 주가는 과거 주가와 관련된 모든 정보 즉, 주가변동의 양상, 거래량의 추세 등 과거의 역사적 정보(past history of stock price itself)를 완전히 반영하고 있으므로 어떤 투자자도 과거 주가변동의 형태와 이를 바탕으로 한 투자전략으로는 초과수익을 얻을 수

없다는 주장이다. 이 가설은 통계학적 의미에서 일련의 연속적인 주가 움직임의 독립성, 무작위성을 뜻한다. 따라서 현실의 증권시장의 약형 효율적 시장인지를 보기 위해서 과거 시계열상의 주가변동에 상관관계가 있는지의 여부를 밝히는 데 초점이 모아지고 있다.

(2) 준강형 효율적 시장가설

준강형 효율적 시장가설(semi-strong form EMH)이란 현재의 주가는 공개적으로 이용이 가능한 모든 정보(all publicly available information)를 완전히 반영하고 있으므로 투자자들은 공표된 어떠한 정보나 이에 바탕을 둔 투자전략으로는 초과수익을 달성할 수 없다는 주장이다. 여기서 공개적으로 이용가능한 정보(공표된 정보)란 과거의 주가나 거래량 같은 역사적 정보뿐만 아니라 기업의 회계정보(순이익 등), 공표된 정부의 경제정책, 경쟁업체의 공시사항, 기업의 배당이나 유・무상증자 또는 합병계획과 같은 사건발표 등의 정보가 포함된다. 이 가설에 의하면 투자자는 어떠한 정보가 공표된 다음에는 그 정보를 활용해도 평균 이상의 수익을 올릴 수 없게 된다는 것이다. 이에 대한 실증적 검증은 어떤 정보가 공표되는 시점을 전후로 한 주가변동을 관찰하여 특정사건의 공표에 대한 주가조정의 속도를 분석한다.

(3) 강형 효율적 시장가설

강형 효율적 시장가설(strong form EMH)이란 일반에게 공개된 정보뿐만 아니라 공개되지 않은 내밀한 정보(private or inside information)까지도 주가에 반영되어 있으므로 투자자는 어떠한 정보에 의해서도 초과수익을 얻을 수 없다는 주장이다. 이에 대한 실증적 검증은 내부정보를 사전에 밝히는 것이 불가능하므로 일반적으로 주가에 충분히 반영되지 않은 정보에 접근할 수 있는 개인이나 집단(예를 들어, 투자신탁운용회사 등의 기관투자가집단)의 초과수익달성 여부를 조사하고 있다.

다. 투자분석에 대한 EMH의 시사점

증권 분석은 개별증권을 중심으로 하는 개별증권 접근방법(전통적인 투자기법)과 효율적 시장을 전제로 포트폴리오의 수익과 위험을 분석하는 포트폴리오 접근방법으로 구분할 수 있다. 전통적 투자기법은 다시 기술적 분석과 기본적 분석으로 구분된다. 먼저 기술적 분석(technical analysis)은 과거주가 또는 거래량에 관한 기록이나 도표를 관찰하여 매도 또는 매수 신호를 포착해내는 분석방법이다. 따라서 약형 EMH가 성립할 경우 비정상 초과수익을 얻을 수 없으며 기술적 분석기법은 존재 의미를 잃는다. 반면, 기본적 분석(fundamental analysis)은 주가를 결정하는 기본요인이 있다고 가정하고 이 기본요인에 의해 주식의 내재가치를 평가하고자 하는 분석방법이다. 일반적으로 주가를 결정하는 기본 요인은 이익 및 배당전망, 이자율전망 및 기업의 위험도 등이 있으며, 이들 대부분은 공표된 정보원천으로부터 입수할 수 있다. 따라서 준강형 EMH가 성립하는 경우에는 기본적 분석에 의해 비정상 초과수익을 얻을 수 없다. 어떤 정보를 이용해도 비정상 초과수익을 얻어낼 수 없는 효율적 시장에서는 포트폴리오 이론을 적용하여 위험을 최소화하는 효율적 포트폴리오에 투자하는 포트폴리오 접근방법이 가장 우수한 투자분석방법이다.

2. 효율적 시장가설의 검증

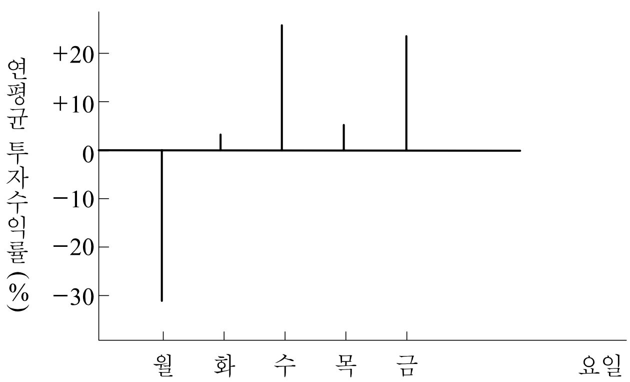
앞의 절에서는 효율적 시장의 가설과 특성을 중심으로 시장효율성의 개념적인 측면을 살펴보았다. 그런데 이 주제의 중요성에 비추어 현실의 증권시장이 과연 얼마나 효율적인지는 실증적 검증을 통해 밝힐 필요가 있다. 시장효율성에 대한 수많은 실증적 분석이 그간 행해져 왔는데 시장효율성을 지지하는 연구결과도 많은 반면에 시장이 비효율적이라는 증거도 나오고 있다.

가. 약형 EMH에 대한 검증

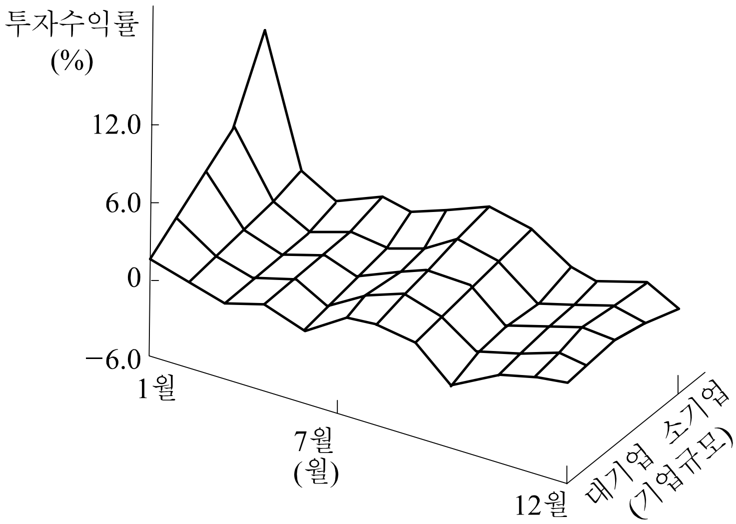
약형(weak-form) EMH에 대한 검증은 연속적인 주가움직임이 무작위적인지 즉 랜덤워크 모형을 따르는가를 규명하는 것이다. 환언하면 과거 일정기간 동안의 증권가격의 자료에서 체계적인 움직임이 존재하는지를 밝히는 작업이 된다. 이 같은 연구는 주로 주가의 시계열적인 예측가능성을 검증하는 것이므로 근래에는“주식수익률 예측가능성”(predictability in stock market returns)이라는 주제로 여러 가지 연구가 이루어지고 있다. 이 분야에 대한 많은 실증연구결과들은 EMH를 지지하는 증거들을 제시하고 있지만, 단기수익률과 장기수익률의 예측가능성은 서로 다른 일면이 있는 것으로 주장되고 있다. 또한 주가의 시계열 움직임에 있어서 초과수익의 가능성이 있는 이례적 현상으로서 1월 효과, 주말효과 등이 제시되고 있다. 현실의 증권시장에서 주가가 무작위적으로 변동하는지를 보는 검증방법으로는 시계열상관분석(자기상관성분석)과 連(run)의 검증방법이 주로 쓰이고 있다. 이에 대한 연구의 범위는 다음과 같다.

① 단기수익률에 대한 연구
② 장기수익률에 대한 연구
③ 주가의 이례적 현상(1월효과, 주말효과, 일중효과 등)에 대한 검증
④ 필터기법, 상대적 강도・투자전략에 대한 검증

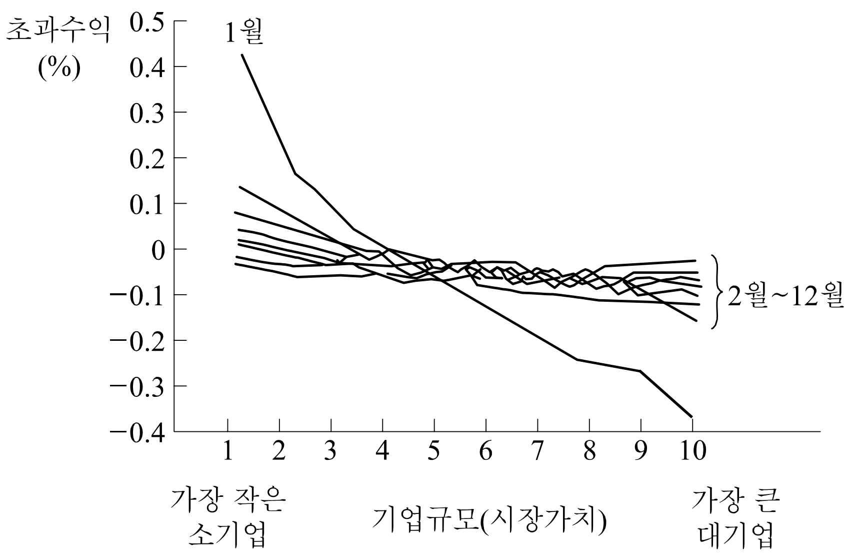
[그림 20] 요일별 주가변동(기본・헤스(1981)의 연구)



[그림 21] 기업규모가 서로 다른 기업군의 1월 효과



[그림 22] 월별 · 기업규모 평균비정상초과수익

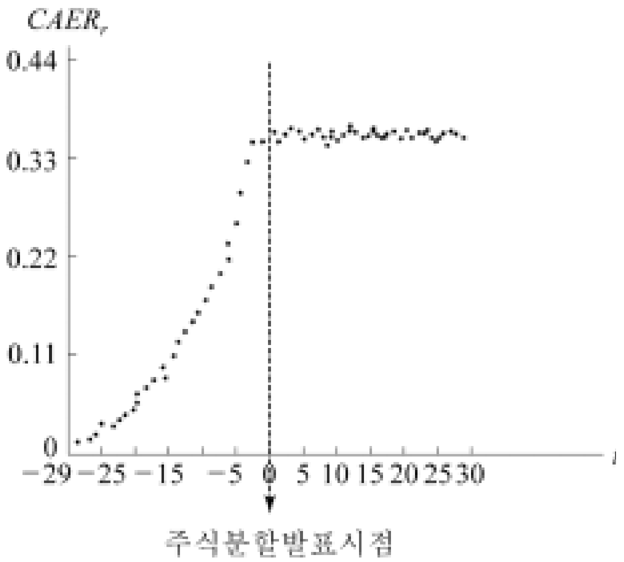


나. 준강형 EMH에 관한 검증

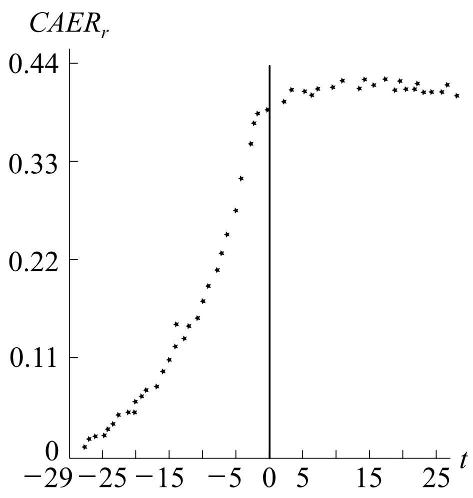
증권시장이 효율적이라면 증권가격은 공개적으로 이용가능한 정보에 신속·정확·충분히 반응해야 한다. 이를 검증하기 위한 방법으로는 기업의 이익이나 배당, 합병 또는 주가분할과 같은 정보의 발표가 있을 때, 이와 같은 특정사건의 공시정보가 주가에 얼마나 신속히 반영되는지 즉, 주가조정의 속도를 검증하는 방법이다. 또한 효율적 시장에서는 남보다 우월한 투자성과를 가져오는 투자전략(portfolio strategy)이나 거래규칙(trading rules)이 존재할 수 없다. 어떤 거래규칙이 과거 어느 시점에서 유용했던 적이 있을지 모르지만 이와 같은 거래규칙에 관한 정보도 확률분포에 반영될 것이므로, 그러한 거래규칙이 현재의 효율적 시장에서 우수한 성과를 일관성 있게 창출할 수 있는지는 의문시된다. 따라서 시장효율성을 평가하는 한 방법으로 공개된 투자전략을 사용하였을 때 과연 남보다 높은 성공적인 투자성과를 얻을 수 있는지를 밝히는 것도 한 방법이 된다. 특정사건의 공시정보에 대한 주가반응의 속도와 초과수익의 존재유무를 밝히는 대표적인 검증방법으로 사건연구(event study), 잔차분석(residual analysis) 등의 방법이 쓰이고 있다.

① 사건연구방법
② 주식분할발표에 대한 주가반응(FFJR의 연구)
③ 분기별 이익보고에 대한 주가반응(RJL의 연구)
④ 상대적 강도 법칙의 투자성과
⑤ 주가의 이례적 현상(소규모기업효과, 저PER주식성과, 저PBR주식성과)에 대한 검증

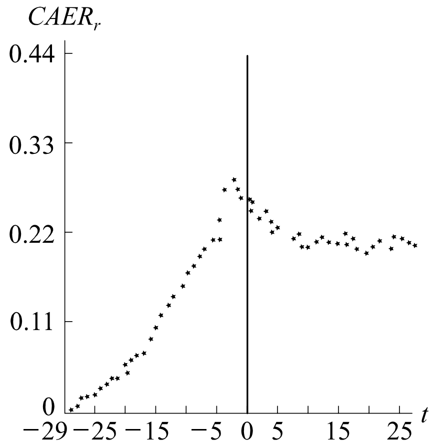
[그림 23] 주식분할에 대한 주가반응(전체표본대상)



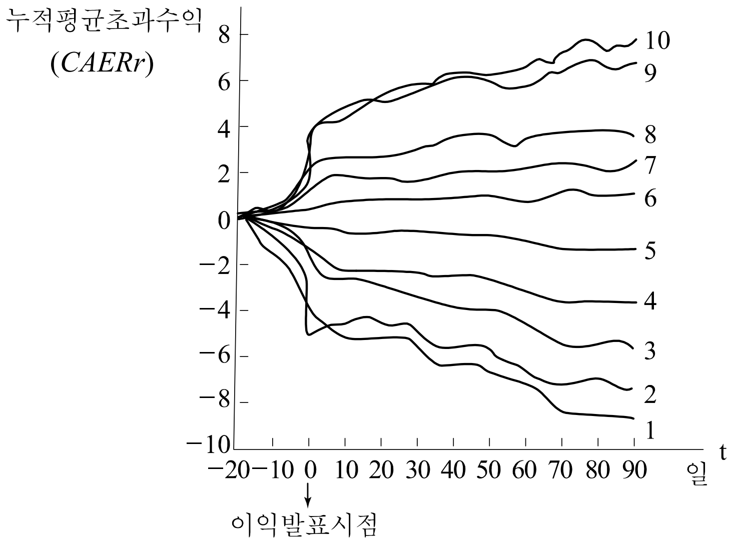
[그림 24] 배당증가가 있었던 주식분할 표본기업의 주가반응



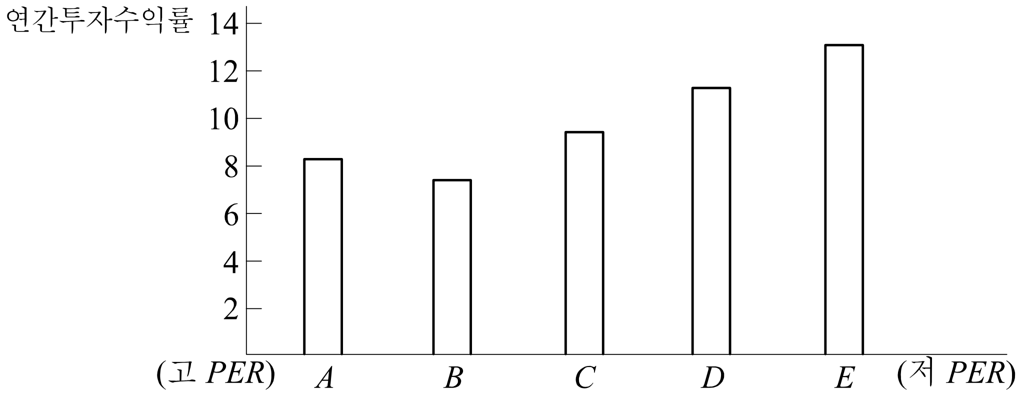
[그림 25] 배당감소가 있었던 주식분할 표본기업의 주가반응



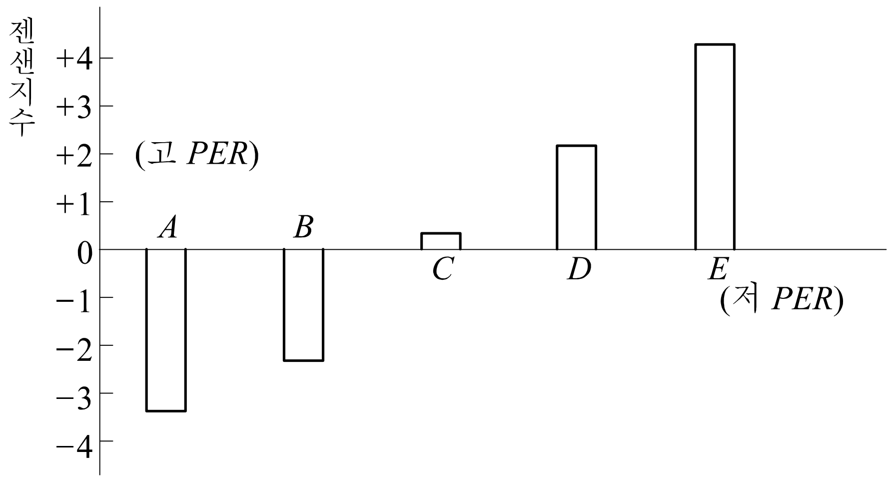
[그림 26] 기간별 이익보고에 대한 주가반응(RJL의 연구)



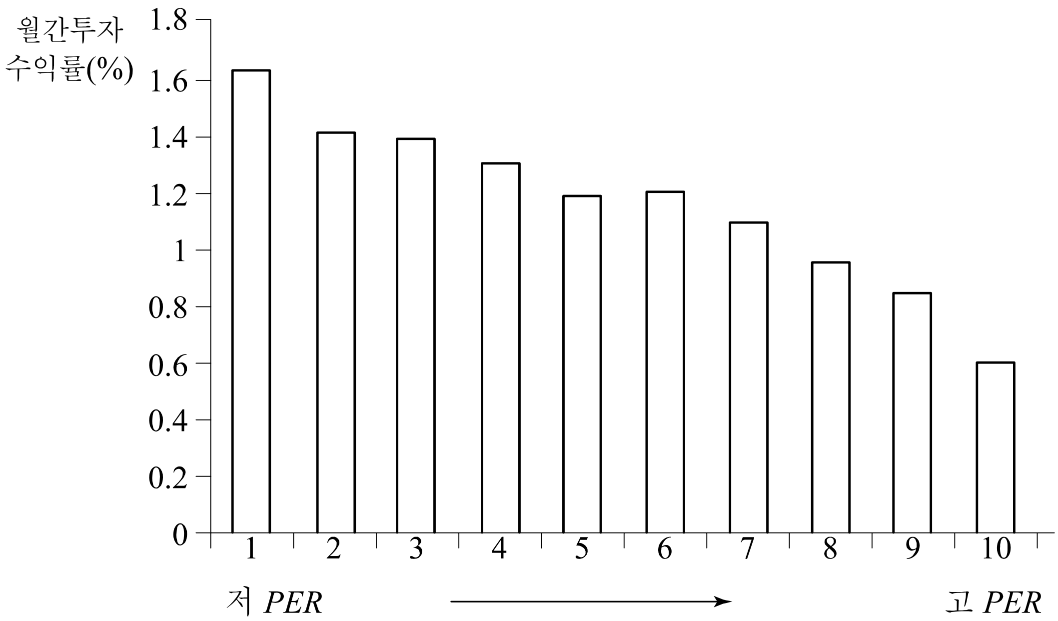
[그림 27] 각 PER 주식군의 성과차이(Basu의 연구)



[그림 28] Jensen지수로 위험이 조정된 성과차이(Basu의 연구)



[그림 29] PBR 그룹의 성과차이



다. 강형 EMH에 대한 검증

강형 효율적 시장가설에 의하면 시장에서 이용할 수 있는 과거의 역사적 정보나 공개적으로 이용가능한 정보뿐만 아니라 비공개적인 모든 정보까지도 증권가격에 신속하게 반영되므로, 어떠한 유형의 정보를 이용하더라도 비정상적 초과수익을 실현할 수 없다. 현실의 증권시장이 강형 효율적 시장인지를 검증하는 것은 앞에서 소개한 실증분석과는 달리 지극히 어려운 작업이 된다. 왜냐하면, 비공개적 내부정보를 정확히 발견해내는 일이 용이하지 않기 때문이다. 그래서 강형 EMH에 대한 검증은 통상 비공개적 정보에 쉽게 접근할 수 있는 특정한 전문투자가집단, 이를테면 투자신탁 또는 뮤츄얼펀드(mutual fund)와 같은 기관들이 비정상적인 초과수익을 실현하고 있는지를 검증하는데 초점이 맞추어지고 있다. 즉, 내부정보의 독점적

이용이 비교적 용이한 기관투자가의 투자성과가 일반투자자의 평균투자수익률을 상회하면 강형 EMH가 기각되는 것으로 볼 수 있고, 그렇지 못하면 지지되는 것으로 판단할 수 있을 것이다.

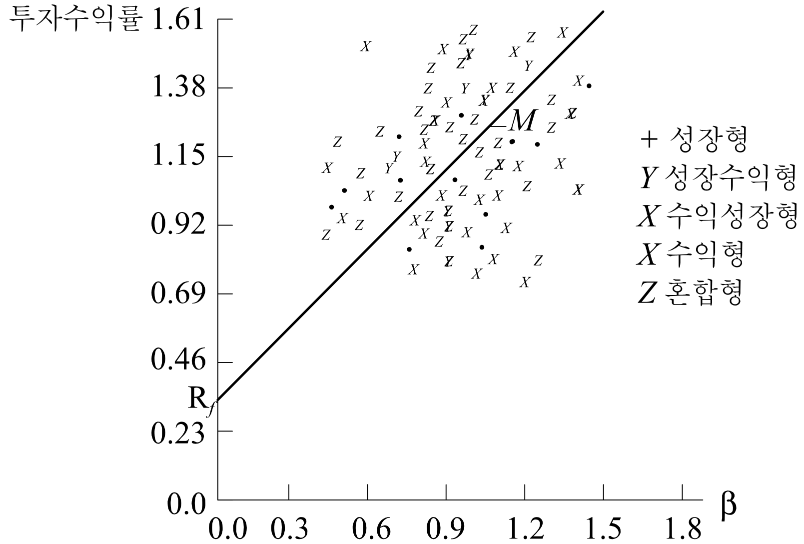
① 내부자의 소유지분변동(Jaffe, 강종만)

② Jensen의 뮤츄얼펀드 성과 연구

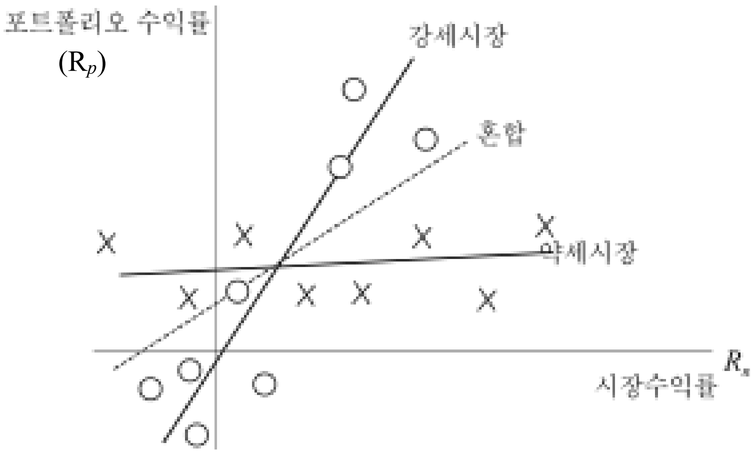
③ Value Line 모형의 초과수익

④ 콘・젠의 연구

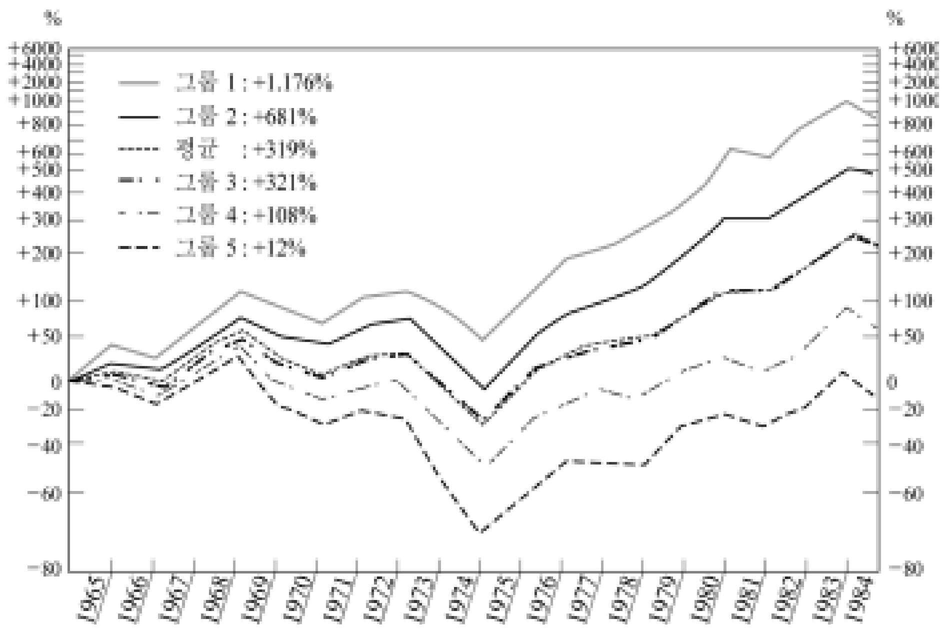
[그림 30] 투자신탁의 투자성과(1955-1964) : 젠센지수에 의한 측정
(제비용을 계상하지 않을 경우)



[그림 31] 시장동향의 변화와 포트폴리오 증권특성선의 추정



[그림 32] Value-Line 모형에 의한 투자성과(1965-1984)



라. 요약 및 결론

이상에서 현실의 증권시장이 효율적 시장가설과 일치하는지를 검증한 주요 연구결과를 소개하였다. 미래증권가격의 변동이 그 전기의 가격변동과 독립적인가를 밝히는 대부분의 약형 EMH에 대한 실증분석결과는 대체로 연속적인 시계열상의 주가변동이 무작위적임을 보여주고 있다. 그러나 장기수익률의 시계열적 움직임에서의 반전현상, 대부분의 나라에서 나타나고 있는 1월 효과, 주말효과의 존재는 이에 반하는 증거로 제시될 수 있다. 주식분할, 배당, 기업이익, 합병 등의 공개적인 정보에 대해서는 증권가격이 신속・정확하게 반응하는 것으로 대부분 검증되고 있다. 그러나 분기이익보고서에 대한 주가반응은 공표 후에도 약 90일 간에 걸쳐 반응하는 것으로 나타나고 있어 준강형 EMH와 일치하지 않는 증거로 제시되고 있다. 또 많은 연구에서 비정상적인 초과수익을 가져다주는 어떤 투자전략이나 거래규칙이 존재하지 않음이 밝혀지고 있는데, 다만 소규모기업의 주식이나 저PBR, 저PER주식에 대한 투자전략은 거래수수료, 위험조정, 세금을 모두 고려하여도 초과수익의 여지가 있는 투자전략일 수 있음을 암시하고 있다. 그러나 이 같은 초과수익은 분석할 때 이용되는 위험조정모형의 잘못된 선택에도 기인할 수 있음을 배제하지 못하고 있다. 끝으로 비공개적인 사적정보에 쉽게 접근할 수 있는 전문투자자집단의 투자성과는 아무런 정보도 이용하지 않는 일반투자자보다도 결코 탁월하지 않다는 증거가 제시되고 있어 강형 EMH가 지지되는 일면을 보이고 있다. 그러나 Value-Line의 예나 시장동향에 따라 공격적 혹은 방어적 투자관리를 하는 측면을 고려하여 투자성과를 측정하면 전문투자자그룹이 잘못 평가된 증권을 식별하는 능력을 소유하고 있음은 증명되고 있다. 전반적으로 이와 같은 여러 가지 상반되는 증거를 중심으로 EMH에 대한 논란은 지금도 여전히 계속되고 있는 증권시장의 주요 과제이다. 이렇게 쉽사리 결론이 나지 않는 이유로 다음의 세 가지를 들 수 있다. 다시 말하면 아래의 세 가지 이유로 말미암아 그 누구도 정확히 시장의 효율성을 측정할 수 없다는 말이다. 첫째로 크기의 문제(magnitude issue)로 불리는 것으로 특정 정보로 인한 비정상적 초과수익이 통계적으로는 의미가 없으나 큰 규모의 펀드인 경우 초과 수익분을 금액으로 환산하여 보면 무시할 수 없는 금액이 되므로 기술적 분석 등이 존재의 의

미가 있다는 것이다. 둘째로, 표본선택의 편기(selection bias)문제로 만약 어느 투자자가 특정투자전략이나 정보로 초과수익을 올렸다면 이 투자자는 이 기법이 알려지면 더 이상 수익을 못 올릴 것이므로 남들에게 이를 알리지 않을 것이다. 따라서 EMH를 지지하는 증거들은 세상에 이미 알려져 쓸모가 없어진 투자전략이나 정보만을 대상으로 얻어진 것일 수 있다. 셋째로 우연한 행운(lucky event)으로 인하여 일시적으로 비정상적 초과수익을 올리는 경우가 있을 수 있다. 이는 비록 큰 투자성과를 올린 경우라도 EMH를 기각하는 증거가 되지 못한다. 이제 지금까지의 논의를 요약하면 증권시장은 엄격한 의미에서는 효율적이라고 할 수 없지만 상당 부분 효율적이라고 결론지을 수 있다. 즉 약형 EMH에 일치하지 않는 1월 효과의 검증, 준강형 EMH에 일치하지 않는 소형주, 저PER주, 저PBR주식 투자전략의 성공적인 투자성과, 강형 EMH에 일치하지 않는 콘・젠 등의 투자신탁성과 연구 등이 제시되고 있지만 이 이외의 검증결과는 대부분의 이용 가능한 정보가 주가에 반영되고 있음을 밝히고 있다. 현실의 증권시장에서 비정상적 초과수익을 획득하는 일이 불가능한 일이 아니지만 결코 쉽지 않다는 증거로 해석할 수 있을 것이다. 남보다 상당히 다른 민첩성이나 창의성이 없이는 초과수익의 여지가 매우 적음을 시사한다고 말할 수 있다.

제6장 연습문제

1. 다음 각각의 정보가 증권가격에 반영되었다면 어떤 형태의 효율시장가설이 각각 지지되는지를 설명하시오.
   (1) 기업의 분기 영업실적 발표
   (2) 배당정책에 관한 이사회의 대외비 토론
   (3) 주식 가격의 과거 추이

2. 발표된 대차대조표 또는 손익계산서에 대한 분석이 효과가 없기 위해서는 시장이 적어도 어느 정도 효율적이어야 하는가?
   ① 약형
   ② 준강형
   ③ 강형
   ④ ①과 ②

[해 답]

1. (1) 적어도 준강형 (즉, 준강형과 강형)
   (2) 강형
   (3) 적어도 약형 (즉 약형, 준강형 및 강형)

2. ② 즉 적어도 준강형으로 구체적으로 열거한다면 준강형과 강형이다.

제7장 통합적 포트폴리오 운용

1. 투자관리방법의 종류

투자관리의 방법은 전술한 것처럼 초과수익 획득노력 여부에 따라서 소극적 투자관리방법과 적극적 투자관리방법으로 나누어 볼 수 있다. 실제의 주가관리에 있어서는 순수한 의미에서의 소극적 투자관리를 하는 경우는 드물고, 시황에 따라 주식과 채권에 대한 투자비율을 조정하여 투자성과를 제고시키거나 초과수익이 클 것으로 기대하는 특정 소수종목에 집중하는 적극적 투자관리방법을 사용하게 된다.

가. 소극적 투자관리

소극적 투자관리(passive portfolio strategy)는 증권시장이 효율적인 것을 전제로 하여 초과수익을 얻고자 하는 시도 대신에 시장전체 평균수준의 투자수익을 얻거나 투자위험을 감수하고자 하는 투자관리방법이다. 또한 투자결정을 위하여 구체적 종목에 대한 증권분석이나 독자적 판단을 하지 않고 시장 전체의 일반적 예측을 그대로 받아들여 정보비용을 극소화시킬 뿐 아니라 매입・매각 결정도 극소화시킴으로써 거래비용도 최소화시키는 투자관리방법이라는 점에서 특징이 있다. 이러한 방법으로는 단순한 매입・보유전략, 시장(지수)펀드・채권(지수)펀드법, 평균투자법 등이 있다.

(1) 단순한 매입 · 보유전략

단순한 매입・보유전략(naive buy-and-hold strategy)은 특정 우량증권이나 포트폴리오를 선택하고자 하는 의도적인 노력없이 단순히 무작위적으로 선택한 증권을 매입하여 보유하는 투자전략이다. 이 전략은 무작위적(random)으로 포트폴리오를 구성하고 분산투자의 종목 수를 증가시키면 증권시장 전체의 평균적인 기대수익률을 얻을 수 있다는 포트폴리오 이론에 근거를 두고 있다. 이 때 부담하게 되는 위험은 보유하는 포트폴리오의 구성증권의 수에 따라 달라지는데 종목수가 많아지면 시장전체의 평균적 위험, 즉, 체계적 위험만 부담하게 된다. 그러나 분산투자의 종목수가 많아지면 거래비용이 증가한다는 문제점이 발생한다.

(2) 시장지수펀드 · 채권지수펀드 투자전략

가장 순수한 의미에서의 소극적 투자관리는 투자신탁회사, 뮤츄얼펀드 등이 설정하고 있는 시장펀드와 채권펀드에 투자하는 것이다. 시장지수펀드(market index fund)는 주가지수 산정에 포함되는 대표적인 주식으로 구성되므로 이에 대한 투자수익과 투자위험이 시장평균수준에 머물게 하는 효과적인 방법이 된다. 또한 국공채펀드나 CD와 같은 화폐시장펀드(money market fund)는 무위험의 투자수익을 얻게 해 준다. 이 투자전략의 문제는 주식시장펀드와 국공채펀드에의 투자비율을 어떻게 정하느냐 하는 것이다. 정보비용과 거래비용을 극소화시키는 방법은 두 펀드에의 투자비율을 고정(예를 들어 주식펀드 대 채권펀드의 비율을 40 : 60으로 고정)시키는 것인데 투자목표를 달성하는데 효과적이지 못할 때가 많게 된다. 만약 앞으로의 증권시장 전망에 따라서 주식펀드의 비중을 높이거나 반대로 채권펀드의 비중을 높이는 운영전략을 사용하게 되면 미래 이자율 동향이나 시장 기대수익률 예측 등을 시도하여야 하므로 정보비용이 증가하게 되고 거래비용도 많아지게 된다. 이 같은 펀드 구성을 기존에 구성되어 있는 수익증권에 투자하지 않고 스스로 구성한다면 정보비용이 더욱 증가하는 것은 당연하다. 구성종목의 베타를 고려하여 투자비율을 조정함으로써 원하는 수

준의 체계적 위험을 통제하는 펀드를 구성할 수는 있으나 정보비용과 거래비용이 증가한다. 투자위험이 통제되는 방어적 투자관리는 가능하지만 투자관리비용이 많이 발생한다. 채권포트폴리오 구성전략으로서 사다리형, 바벨형 등의 만기구성전략은 기계적인 운용전략이므로 정보비용이 발생하지 않지만, 듀레이션을 이용하여 이자율변동 위험을 제거시키는 채권면역전략은 어느 정도의 정보비용이 발생하게 된다.

(3) 평균투자법

평균투자법(dollar cost averaging)은 주가의 등락에 관계없이 정기적으로 일정금액을 주식에 계속 투자하는 방법이다. 주가가 하락하면 상대적으로 많은 수량의 주식을 살 수 있어 평균매입주가는 낮아지게 되는데, 이 낮은 가격으로 매입한 주식을 주가상승기에 매각하면 적지 않은 자본이득을 얻을 수 있다는 것이다. 이 방법은 주가가 하향추세일 때는 효과가 있으나 상향추세일 때는 의미가 없게 된다. 이상에서 요약한 소극적 투자관리방법은 기본적으로 정보비용과 거래비용을 극소화시키지만, 실제의 운용에 있어서는 시황변동에 따른 탄력적인 자산배분을 통하여 수익을 극대화하는 노력을 하게 되므로 점차 적극적 투자관리의 성향을 띄게 된다.

나. 적극적 투자관리

적극적 투자관리(active management)라 함은, 일정한 위험수준에 상응하는 기대수익 이상의 초과수익을 얻기 위한 투자전략을 행사하는 것을 뜻한다. 이를 보통 “beat the market”전략이라고 한다. 이러한 투자관리방법은 증시가 비효율적인 것을 전제로 내재가치와 시장가격 사이에 차이가 있는 증권을 식별하여 과소평가된 증권은 매입하고 과대평가된 증권은 매각하는 방법이다. 적극적 투자관리의 방법은 투자자의 독자적인 증권분석과 예측이 시장전체의 대체적인 견해(예측)보다 정확하다는 판단에 근거하여 위험이 동일한 증권들 중에서 수익이 높은 증권을 선택하는 방법이다. 수많은 종목에 분산투자하는 것보다 초과수익이 가능하다고 보는 소수종

목, 특정산업에 집중투자하는 것도 이 방법의 특징이기도 하다. 결과적으로 정보 비용과 거래 비용이 많이 발생하게 된다는 단점을 지니게 된다.

① 시장투자적기 포착법(market timing), 포뮬라 플랜

② 소수종목 및 특정산업 집중투자

- 제조업, 금융업……,
- 소비재, 산업재, 서비스재……,
- 성장주, 안정주, 경기순환주, 배당주, 대형주, 소형주……,
- 기본경제상황에 대한 민감도(금리변동민감주, 환율변동민감주……)

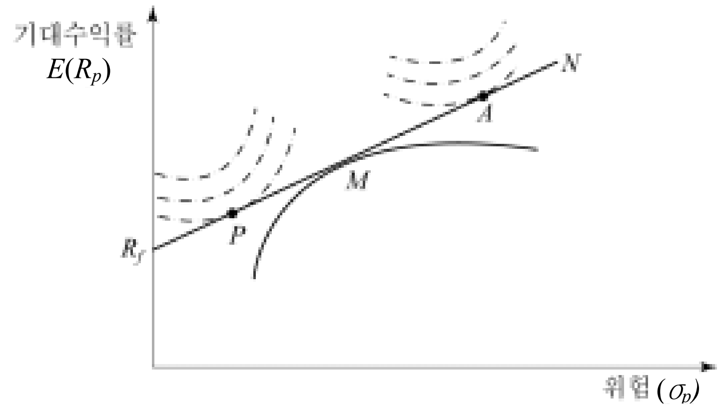
(1) 자산배분결정

주식, 채권, 현금 등 각급 투자자산에의 투자비율을 얼마로 하는 것이 투자성과를 가장 좋게 할 것인가? 각급 투자자산에 대한 적절한 자산배분(asset allocation)을 통하여 초과수익을 얻는 적극적 투자관리방법으로는 주식시장과 채권시장의 동향을 예측하여 자산배분시점을 포착하는 시장투자적기포착방법과 기계적인 배분방법인 포뮬라 플랜을 들 수 있다.

■ 시장투자적기포착(market timing)

포트폴리오 이론에 의하면 위험자산으로는 시장포트폴리오를 구성하여 일부 자금을 투자하고 나머지 자금은 무위험자산인 국공채, 정기예금에 투자하면 가장 좋은 투자성과가 기대되는 효율적 포트폴리오를 구성할 수 있게 된다. 즉 [그림 33]은 자본시장선(CML)을 다시 그린 것인데 시장포트폴리오(M)와 무위험자산(Rf)에 투자자금을 나누어 투자하면 RfMN상의 투자성과를 기대할 수 있게 되어 다른 경우보다도 우월한 투자성과를 얻게 된다.

[그림 33] 포트폴리오이론에 근거한 자산배분의 결정



여기서 양쪽에 대한 투자자금의 비율은 투자자의 위험선호도에 따라 다르게 되는데, 방어적 투자자는 P와 같은 방식으로 투자비율을 결정하고 공격적 투자자는 A와 같은 방식으로 투자비율을 결정할 것이다. 이제 주식시장펀드와 무위험자산펀드에 대한 투자비율을 결정할 때 초과수익을 높이는 방법은 증권시장의 동향을 예측하여 자산배분의 유리한 시점을 포착하는 것이다. 이를테면 주식시장수익률이 무위험자산수익률을 상회할 것으로 예상되면 주식시장펀드에 대한 투자비율을 높이고, 반대로 하회할 것으로 예상되면 무위험자산펀드에의 투자비율을 높이는 방법이다. 시장투자적기 포착방법(market timing)은 이처럼 주식시장과 채권시장 동향에 대한 예측을 근거로 주식시장펀드 혹은 무위험자산펀드에 대한 투자비율(자산배분)을 유리하게 하는 적절한 투자시점을 포착하는 방법이다. 자산배분을 위한 투자적기를 포착하는 구체적 방법으로는 챠트분석 중심의 기술적 분석기법을 활용하거나 경기순환 · 이자율동향, 기타 주요 거시경제변수의 움직임을 복합적으로 고려하는 기본적 분석기법이 있다. 시장동향을 완벽하게 예측하여 자산배분의 시기를 정확하게 포착(이를 perfect market timing이라고 한다)한 경우의 보상은 매우 크게 된다. 보디 · 케인 · 마커스(Z. Boodie, A. Kane & A. J. Marcus)의 분석에 의하면 1927년 1월 1일 $1,000을 투자하여 1978년 12월 31일

까지 52년간 세 가지의 포트폴리오구성전략, 즉

① 30일 CP(무위험자산펀드)에 계속적으로 재투자

② NYSE지수펀드에 중도 배당수입과 함께 계속적으로 재투자

③ NYSE지수펀드의 수익률과 CP수익률 중에서 높은 것을 사전에 완벽하게 예측하여 자산배분운용을 한 것을 가정한 경우

세 가지의 투자성과를 비교하였는데, 다음에 보는 것과 같이 ③의 완전한 시장투자적기포착방법이 월등한 투자성과를 보이고 있어 기술적 분석이나 기본적 분석과 같은 증권분석을 이용한 적극적 투자관리가 예상대로 성공하면 그 초과수익이 매우 큼을 알 수 있다.

투 자 전 략	투자수익($)	연평균수익률(%)	표준편차(%)
① 30일 CP(무위험자산펀드)에 재투자	3,600백만	2.49	2.10
② NYSE・지수펀드에 재투자	5,360백만	8.44	22.14
③ 완전한 시장예측에 의한 자산배분(perfect timing)	67,500백만	34.71	

■ 포뮬라 플랜(formula plan)

포뮬라 플랜 또는 비율계획법(ratio plan)은 일정한 규칙에 따라서 기계적으로 자산배분을 하는 방법이다. 구체적으로 공격적 투자수단인 주식과 방어적 투자수단인 채권사이를 경기변동에 따라 번갈아 가면서 투자하는 방법인데, 주가가 낮을 때 주식을 매입하고 주가가 높을 때 매각하도록 운용하는 것이다. 최소한의 위험부담으로 경기변동에 탄력성있게 적응하는 데 기본목적이 있는 투자방법이다. 포뮬라 플랜에는 불변금액법, 불변비율법, 변동비율법이 있다.

① 불변금액법(constant dollar plan)

투자자금을 주식과 채권으로 나누어서 주식가격변동에 관계없이 주식에 투자한 금액을 언제나 일정하게 유지하는 방법이다. 주가가 상승하면 미리 결정된 일정금

액 이상의 주식을 매각하여 채권을 사들이며, 주가가 하락할 때는 채권을 매각하고 주식을 매입하여 주식에 투자한 금액을 언제나 일정하게 유지하는 방법이다.

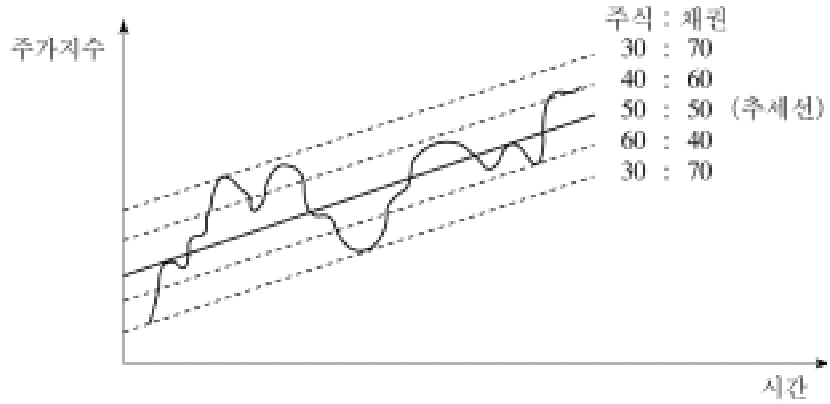
② 불변비율법(constant ratio plan)

앞의 방법과 유사한데 다만 채권과 주식에 투자된 금액의 비율을 언제나 일정하게 하는 방법이다. 가령 50 : 50의 비율로 유지한다면 주가나 채권의 시장가격변화에 관계없이 이 비율을 유지하는 방법이다. 그래서 주가가 채권가격보다 상대적으로 많이 오르게 되면 주식에 대한 투자비율을 50%로 유지하도록 주식을 매각하고 채권을 매입하는 것이다. 이 방법의 결점은 최적비율을 정하는 것이 임의적이고 불변금액법과 마찬가지로 빈번한 거래수수료를 부담하여야 한다는 데 있다.

③ 변동비율법(variable ratio plan)

앞의 불변비율법을 약간 수정한 것으로 주식과 채권에 대한 투자비율을 일정하게 두지 않고 주가변화에 대한 예측에 따라서 적절히 비율을 변동시켜 가면서 투자하는 방법이다. 주가가 높으면 앞으로 하락을 예상할 수 있으므로 주식에 대한 투자비율을 낮추고 주가가 낮으면 앞으로 상승을 예상할 수 있으므로 주식에 대한 투자비율을 높이는 방법이다. 양자간의 투자비율을 언제・어떻게 변동시킬 것인가를 알기 위해서는 주가지수의 움직임을 예측할 수 있어야 하는데 대체적인 추세선(trend line)을 중심으로 몇 개의 범위를 설정하여 비율을 변동시키는 방법이 일반적이다. 이를테면 주가가 [그림 34]과 같은 추세선을 보인다면, 주가지수가 추세선의 중앙수준에 올 경우는 주식 대 채권의 비율을 50 : 50으로 하고, 주가지수가 추세선 위로 한 단계씩 상승하게 되면 40 : 60, 30 : 70의 비율로 주식에 대한 투자비율을 줄이는 것이다. 이 방법 또한 주가가 낮을 때 주식매입을 늘리고 주가가 높을 때 주식매각을 늘린다는 원리를 활용한 것이다. 변동비율법은 정확한 주가지수의 추세선의 예측이 전제되고 있다. 이 방법의 결점은 추세선을 예측하기 힘들다는 점과 변동비율의 설정이 너무 주관적이라는 점에 있다.

[그림 34] 포뮬라 플랜에 의한 자산배분



(2) 종목선정

초과수익을 얻고자 하는 적극적 투자관리에서 자산배분 못지않게 중요한 것은 각급 투자자산(주식이나 채권 등)내에서 초과수익의 여지가 높은 특정 개별종목을 선정(security selection)하는 일이다.

■ 내재가치의 추정

개별종목의 내재가치를 추정하여 시장가격이 잘못 형성된 증권들(mispricedsecurities)을 선정해내는 기본적 분석방법이 적극적 종목선정에 가장 많이 이용되고 있다.

■ RVAR비율 이용

증권분석에서 얻어진 정보를 이용하여 초과수익의 여지가 큰 소수종목으로 구성되는 포트폴리오의 기대수익률 $E(R_P)$와 표준편차 σ_P를 추정하여 앞서 설명한 변동성보상비율($RVAR = [E(R_P) - R_f]/\sigma_P$)을 크게 하는 포트폴리오를 최종적으로 구성하는 방법이 시도될 수 있다.

■ β계수의 이용

베타(β)계수의 추정에 근거하여 강세시장이 예상될 때는 위험(β계수)이 큰

종목을 선택하고, 약세시장이 예상될 때는 β계수가 적은 종목을 택하는 것이 적절한 투자시기(market timing)를 이용한 종목선택의 방법이 된다.

■ 트레이너-블랙모형(Treynor-Black Model)의 이용

증권분석을 하여 가격이 잘못 형성된 소수의 증권들에 투자를 하게 되면 초과수익의 가능성은 높지만 분산투자가 잘 이루어지지 않은 탓으로 투자위험 또한 높게 된다. 따라서 적극적 투자관리의 과제는 적절한 소수종목의 선택으로 초과수익을 획득하면서도 적절한 분산투자로서 분산가능위험을 가급적 줄이는 것이다. 즉, 초과수익의 획득과 비체계적 분산가능위험의 감소, 양자간에 적절한 균형 내지 최적화를 이루는 것이다. 트레이너・블랙(J. Treynor & F. Black)은 이 양자간에 최적화를 기할 수 있는 종목선택, 포트폴리오구성방법을 제시하고 있는데, 이를 요약하면 다음과 같다.

① 증권분석을 하여 과소평가 혹은 과대평가된 소수의 주식들을 선별한다.

② 소극적 투자관리의 대상이 되는 주식시장지수펀드의 수익률을 최소한의 수익률로 간주하고 시장예측에 근거하여 이 시장지수펀드의 기대수익률 $E(R_m)$과 표준편차σ_m, 무위험자산수익률 R_f을 추정한다.

③ ①에서 선별된 소수의 개별증권들에 대하여 기대수익률$E(R_j)$, 베타β_j, 잔차분산(비체계적 위험) $\sigma^2(\varepsilon_j)$을 추정한다.

④ 이들 개별종목의 초과수익 알파(a_j)는 기대수익률에서 요구수익률의 차이로 추정하는데, 요구수익률은 증권시장선[$k = R_f + \beta_j (E(R_m)-R_f)$]으로 구한다.

⑤ 소수종목으로 구성되는 포트폴리오의 초과수익(α_P), 베타 β_P, 잔차분산 $\sigma^2(\varepsilon_P)$을 계산한다.

⑥ 초과수익의 가능성과 분산가능위험의 감소간에 균형을 이룰 수 있는 각 종목에 대한 최적 투자비율의 결정은 다음의 평가비율(appraisal ratio) 즉, 초과수익(과소・과대평가된 크기) 대 잔차분산비율에 근거한다.

$$\text{평가비율} = \text{초과수익/잔차분산(비체계적 위험)} = \frac{\alpha}{\sigma^2(\varepsilon)} \qquad (7\text{-}1)$$

그래서 각 종목에 대한 최적 투자비율은 개별종목들의 평가비율의 합에 대한 개별종목 j의 평가비율의 비로서 결정한다. 즉,

$$\text{최적투자비율} = \frac{\dfrac{\alpha_j}{\sigma^2(\varepsilon_j)}}{\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\alpha_j}{\sigma^2(\varepsilon_j)}} = \frac{\text{개별종목 } j\text{의 평가비율}}{\text{포트폴리오 평가비율의 합}} \qquad (7\text{-}2)$$

이 식에 의하면 비체계적 위험에 비하여 과소·과대평가된 크기(초과수익)가 큰 종목일수록 투자비율이 높게 구성되는 특징을 지닌다.

[예 제]

우신투자자문(주)에서는 다각적인 증권분석을 통하여 주식시장펀드의 기대수익과 표준편차, 무위험자산수익률을 각각 15%, 20%, 8%로 추정하고 있으며, 초과수익의 여지가 있는 세 종목의 초과수익크기, 베타, 비체계적 위험에 대한 추정자료는 다음과 같다.

종 목	초과수익 (α)	베타 (β)	비체계적 위험 ($\sigma(\varepsilon)$)
(주) 대맥	7%	1.6	45%
(주) 소맥	-5	1.0	32
(주) 지리	3	0.5	26

이 세 종목으로 구성되는 포트폴리오의 초과수익률을 크게 하면서 분산가능 비체계적 위험을 작게 하는 최적투자비율을 구하라. 또 이 포트폴리오의 초과수익률, 베타, 비체계적 위험을 구하라.

㉠ 개별종목들의 평가비율과 최적 투자비율의 계산

종 목	$\alpha_j/\sigma^2(\varepsilon_j)$	$\dfrac{\alpha_j}{\sigma^2(\varepsilon_j)} \Big/ \sum_{j=1}^{1}\dfrac{\alpha_j}{\sigma^2(\varepsilon_j)}$
(주) 대맥	$0.07/(0.45)^2 = 0.3457$	$0.3457/0.3012 = 1.1477$
(주) 소맥	$-0.05/(0.32)^2 = -0.4883$	$-0.4883/0.3012 = -1.6212$
(주) 지리	$0.03/(0.26)^2 = 0.4438$	$0.4438/0.3012 = 1.4735$
합 계	0.3012	1.0000

㉡ 최적 투자비율에 의한 포트폴리오의 초과수익률, 베타, 비체계적 위험

초과수익률 : $\alpha_p = 1.1477 \times 0.07 + (-1.6212) \times (-0.05)$
$+ 1.4735 \times 0.03 = 20.56\%$

베 타 계 수 : $\beta_p = 1.1477 \times 1.6 + (-1.6212) \times (1.0)$
$+ 1.4735 \times 0.5 = 0.9519$

비체계적 위험 : $\sigma^2(\varepsilon_p) = 1.1477^2 \times (0.45)^2 + (-1.6212)^2 \times (0.32)^2$
$+ 1.4735^2 \times (0.26)^2 = 68.26\%$

㉢ (주)소맥과 같이 과대평가(負의 초과수익)된 주식을 空賣(short position)함으로써 전체 포트폴리오의 초과수익률은 증가되고 베타계수는 감소하고 있다.

■ 시장의 이례적 현상을 이용한 투자전략

여러 가지 형태의 증권정보 혹은 특정 투자전략이 지니는 정보내용은 증권가격에 신속히 반영되므로 그간 이루어진 대다수의 시장효율성에 대한 실증적 검증결과가 보여 주듯이 초과수익을 계속적으로 가능케 하는 투자전략을 찾아내는 것은 결코 쉽지 않은 작업이다. 그러나 다음의 예들은 초과수익의 가능성을 암시하는 이례적 현상(market anomalies)으로 이들 이례적 현상을 면밀하게 분석하고 민첩한 투자결정을 함으로써 초과수익을 얻고자 하는 투자전략이 있을 수 있다.

① 기업규모효과(소규모 기업주식으로 포트폴리오 구성)
② 저PER효과
③ 저PBR효과
④ 소외기업효과
⑤ 상대적 강도
⑥ 1월효과
⑦ 주말효과
⑧ 예상외이익(=실제이익 · 기대이익) 발표효과
⑨ 주식분할
⑩ 최초공모주식

⑪ 유・무상증자

⑫ 장기수익률의 역전효과

다. 포트폴리오 수정

포트폴리오 수정(portfolio revision)이란 포트폴리오를 구성한 후 미래 투자상황에 대한 예측이 잘못되었거나, 새로운 상황 전개로 인하여 투자목표를 달성하고자 기존 포트폴리오를 변경 내지 개편하는 것을 말한다. 당초의 투자자의 예상과 다른 새로운 상황의 전개란 기업이익과 배당에 영향을 주는 영업효율성・재무효율성의 변화, 각종 위험의 변화, 경제외적 여건의 급격한 변화 등을 말한다. 이러한 일이 벌어지면 처음에 예상했던 기대수익과 위험에 변화가 있게 되므로 원하는 기대수익과 위험에 상응하는 포트폴리오로 수정해 나가야 한다. 수정하는 방법에는 리밸런싱과 업그레이딩의 두 가지가 있다.

(1) 포트폴리오 리밸런싱

포트폴리오 리밸런싱(portfolio rebalancing)의 목적은 상황변화가 있을 경우 포트폴리오가 갖는 원래의 특성을 그대로 유지하고자 하는 것이다. 주로 구성종목의 상대가격의 변동에 따른 투자비율의 변화를 원래대로의 비율로 환원시키는 방법을 사용한다. 예를 들어, <표 9>에 예시된 주식에 1/4씩 투자한 포트폴리오를 구성하여 포트폴리오의 체계적 위험을 1.10으로 유지하였는데 기업내・외적 여건변화로 인하여 기말에 상대가격이 변하였다. 결과적으로 투자비율이 달라지고 포트폴리오의 체계적 위험이 1.16으로 증가하였다.

〈표 9〉 상대가격의 변화와 포트폴리오 리밸런싱

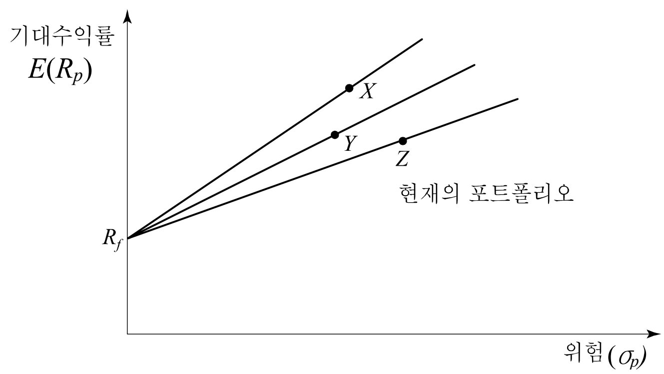
주 식	체계적 위험	기초 포트폴리오			기말변경된 포트폴리오	
	(β_j)	주 가	매입주식수	투자비율	주 가	투자비율
주 식 A	1.40	₩15,000	100주	0.25	₩30,000	0.36
주 식 B	1.16	7,500	200	0.25	11,250	0.27
주 식 C	0.96	5,000	300	0.25	6,000	0.22
주 식 D	0.88	3,000	500	0.25	2,400	0.15
포트폴리오 베타 = $\omega_j\beta_j$		1.10			1.16	

이 경우 원하는 투자목표(체계적 위험의 유지)를 위하여 투자비율이 높아진 주식을 매각하여 투자비율이 낮아진 주식을 매입하게 되면 원래의 포트폴리오 구성과 같은 투자비율이 된다. 이를 고정목표 수정전략이라 하는데, 자금의 재배분을 통해서 자본이득의 가능성이 사라진 주식에서 앞으로 그 가능성이 큰 주식으로 옮겨가게 되는 이점이 있게 된다.

(2) 포트폴리오 업그레이딩

새로운 상황전개는 기존 포트폴리오의 기대수익과 위험에 영향을 주므로 증권의 매입・매각을 통해서 업그레이딩을 행하여야 한다. 포트폴리오 업그레이딩(portfolio upgrading)은 위험에 비해 상대적으로 높은 기대수익을 얻고자 하거나, 기대수익에 비해 상대적으로 낮은 위험을 부담하도록 포트폴리오의 구성을 수정하는 것이다. 많은 경우, 성과가 좋은 증권을 찾기보다는 큰 손실을 초래한 증권을 식별하여 그 증권을 포트폴리오에서 제거하는 방법을 사용한다. 예를 들어, [그림 35]에서 당초, 포트폴리오를 구성할 때는 포트폴리오 Z가 최적인 것으로 예상되었다. 그런데 기간이 경과하면서 새로운 정보의 유입에 따라 미래수익과 위험을 다시 예측한 결과 포트폴리오 X, Y가 발견되었다면 포트폴리오 Z는 더 이상 효율적이지 못하다. 포트폴리오 X에 근접한 기대수익률과 위험을 얻기 위해서는 Z에 대한 투자비율을 줄이고 다른 증권들을 매입함으로써 포트폴리오 업그레이딩을 할 필요가 있는 것이다.

[그림 35] 포트폴리오 업그레이딩



2. 투자성과평가

투자관리의 마지막 과정은 그간의 투자성과를 평가하는 것이다. 과거 일정기간의 투자성과를 평가하는 것은 하나의 통제과정으로서 앞으로 더 나은 포트폴리오구성과 투자전략수립에 도움을 준다. 근래 투자신탁, 뮤츄얼펀드나 투자자문회사에 대한 이용도가 높아지고 있는데, 어느 포트폴리오 매니저의 투자성과가 우수한지를 평가하는 것은 차후의 투자관리에 도움을 준다. 또한 대규모의 투자자금을 운용하는 기관투자가의 경우 각 자금운용자에 대해 투자성과를 평가하는 것은 기관의 경영관리 차원에서 중요한 과제가 된다. 투자성과를 평가하게 될 때는 여러 가지 사항이 검토되어야 한다. 과거 일정기간 동안의 투자수익률을 어떻게 측정할 것인가, 부담했던 투자위험의 정도는 성과평정에 어떻게 반영시킬 것인가, 좋고 나쁜 성과의 원인은 어디에 있는가 등이 검토될 필요가 있다.

가. 운용투자수익률의 측정

투자자금을 운용한 기간이 단일기간(one period)일 때는 투자수익률의 계산이 매우 간단하다. 단일기간의 보유투자수익률은 단지 총투자수입을 기초의 투자금액으로 나누어 계산하면 되기 때문이다. 주식투자의 경우는 배당수입과 시세차익이 총투자수입을 구성할 것이며, 채권투자의 경우는 이자수입과 시세차익이 총투자수입을 구성하게 된다.

$$\begin{aligned} \text{단일기간 수익률} &= \text{총투자수익/기초투자액} \\ &= [\text{배당 또는 이자} + \text{시세차익(차손)}]/\text{기초투자액} \end{aligned} \tag{7-3}$$

그러나 투자자금이 다기간(multi-period)에 걸쳐 운용되면, 투자수익률의 계산은 단순하지 않다. 더욱이 중도에 자금일부의 회수, 추가적인 투자 혹은 재투자 등이 이루어지면 계산이 복잡해진다. 다기간 투자수익률을 계산할 때는 내부수익률, 산

술평균수익률, 기하평균수익률이 사용되는데 이제 이들 세 가지 투자수익률의 계산 방법과 특징을 다음 세 가지 상황에서 살펴보기로 하자.

(상황1) (주)만수의 주식을 첫째 해 초 ₩10,000에 매입하여 연말에 ₩400의 배당금을 받았 다. 둘째 해 초에 동일 주식을 ₩10,600에 추가매입하여 둘째 해 말에 ₩800의 배당금(한 주당 ₩400 배당)을 받고 ₩21,600(한 주당 ₩10,800)에 매각하였다.

	0	1	2
(기간)			
	−10,000	+400	+800
		−10,600	+21,600
(단일기간수익률)		${}_0r_1$ = (400+600)/10,000	${}_1r_2$ = (400+200)/10,600
		= 10%	= 5.66%

(상황2) (주)강산의 주식에 첫째 해 초 ₩1,000만 투자하였는데 1년 후 가격상승으로 ₩2,000만이 되었다가 2년 말에는 다시 하락하여 ₩1,000만이 되었다.

	0	1	2
(기간)			
	-1,000만	+2,000만	+1,000만
(단일기간수익률)		${}_0r_1$ = 1,000/1,000	${}_1r_2$ = -1,000/2,000
		= 100%	= -50%

(상황3) (주)만강에 지금 ₩1,000만 투자하고 있는데, 앞으로 1년간에 걸친 투자수익률이 100%(금액기준 ₩2,000만)가 될 확률이 0.5이고, 투자수익률이 -50%(금액기준 ₩500만)가 될 확률이 0.5이다.

■ 산술평균수익률(ARR : arithmetic average rate of return)

산술평균수익률은 기간별 단일기간수익률을 모두 합한 다음 이를 관찰수(기간수)로 나누어 측정한다. (상황 1)의 경우 산술평균수익률은 다음과 같이 계산된다.

$$ARR = 1/2(10\% + 5.66\%) = 7.83\%$$

산술평균수익률은 기간별 투자금액의 크기를 고려하지 않고 단일기간수익률을 평균하여 계산되므로 결국 기간에만 가중치가 주어진 셈이 되어 시간가중평균수익률(time-weighted rate of return)이라고도 한다. 내부수익률의 계산은 기간별 투자금액의 크기와 최종시점에서의 부의 크기가 고려되는 계산이므로 적절한 투자수익률이 계산이 되지만, 자금운용자가 중도 투자금액이나 현금흐름에 대하여 재량권이 없는 경우라면 시간가중평균수익률의 계산이 더 적절하게 된다.

■ 내부수익률(IRR : internal rate of return)

내부수익률은 서로 상이한 시점에서 발생하는 현금흐름의 크기와 화폐의 시간적 가치가 고려된 평균투자수익률의 개념으로서 현금유출액의 현재가치와 현금유입액의 현재가치를 일치시켜주는 할인율을 계산하여 측정한다. 따라서 기간별 투자액이 상이한 (상황 1)의 경우 내부수익률을 시행착오법에 의해서 계산하면 다음과 같다.

$$10,000 + \frac{10,600}{(1+r)} = \frac{400}{(1+r)} + \frac{800+21,600}{(1+r)^2}$$

$$r = 7.12\%$$

내부수익률의 계산은 기간별 상이한 투자금액의 크기에 가중치가 주어져 수익률이 계산되므로 금액가중평균수익률(amount-weighted rate of return)이라고도 한다. (상황 1)의 경우는 수익률이 저조한 기간 2에 투자금액이 많으므로 평균투자수익률이 낮다.

- 기하평균수익률(GRR : geometric average rate of return)

산술평균수익률은 수익률이 복리로 증식되는 것을 감안하지 않는 반면에 기하평균수익률은 중도현금흐름이 재투자되어 증식되는 것을 감안한 평균수익률의 계산방법이다. 특히 기하평균수익률은 중도 재투자수익률이 변동하는 경우에도 적용될 수 있는 계산방법으로 다음과 같이 계산된다.

$$GRR = \sqrt[n]{(1+{}_0r_1)(1+{}_1r_2)\cdots\cdots(1+{}_{n-1}r_n)} - 1$$

만약 기초의 부(w_0)와 n년 후 기말의 부(w_n)만 알고 있을 경우의 기하평균수익률은 다음과 같다.

$$GRR = \sqrt[n]{\frac{w_n}{w_0}} - 1$$

따라서 (상황 1)의 기하평균수익률은 다음과 같이 계산된다.

$$GRR = \sqrt[2]{(1+0.1)(1+0.056)} - 1 = 7.81\%$$

기하평균수익률의 계산은 중도현금이 재투자되고 최종 시점의 부의 크기가 감안된 계산방법이므로 산술평균수익률의 계산방법보다도 합리적이다. (상황 2)에서의 수익률 계산은 이 같은 측면을 잘 보여주고 있다.

$$\text{산술평균수익률 } ARR = \frac{1}{2}[100\% + (-50\%)] = 25\%$$

$$\text{기하평균수익률 } GRR = \sqrt[2]{(1+1.0)(1-0.5)} - 1 = 0.0\%$$

그러나 기하평균수익률의 계산은 과거 일정기간의 투자수익률 계산에는 적절하나, 미래 기대수익률의 계산에는 적절하지 못하다. 오히려 미래 기대수익률의 계산에는 산술평균수익률을 사용하는 것이 합당하다. (상황 3)에서의 수익률 계산은 이 같은 측면을 잘 보여주고 있다.

$$\text{기하평균수익률 } \quad GRR = \sqrt[2]{(1+1.0)(1-0.5)} - 1 = 0.0\%$$

$$\text{산술평균수익률 } \quad ARR = 100\%(0.5) + (-50\%)(0.5) = 25\%$$

$$\text{또는 } r = \left[\frac{2,000\times 0.5 + 500\times 0.5}{1,000}\right] - 1 = \frac{1,250}{1,000} - 1 = 25\%$$

나. 성과평가를 위한 투자위험의 조정방법

투자성과를 평가하는데 일정기간동안에 걸친 투자수익률만을 단순히 비교하여 우열을 가리는 것은 적절한 평가방법이 되지를 못한다. 왜냐하면 투자기간 동안 부단한 위험도 고려하여야 하기 때문이다. 이를테면 갑은 우량안정주식들로 운용하여 20%의 투자수익률을 거두었고, 을은 관리대상종목이나 주가변동이 매우 큰 투기종목들로 운용하여 25%의 투자수익률을 올렸다면 을의 운용성과가 결코 좋은 것이 아니다. 성과평가시에는 위험이 조정된 성과척도(risk-adjusted performance measures)를 이용하여야 한다. 위험이 조정된 성과척도로는 아래에 상술하는 샤프지수, 트레이너지수, 젠센지수, 평가지수 등이 있다. 이들은 투자위험 중에서 어떤 성격의 위험을 기준으로 투자성과를 평가하느냐에 따라서 차이가 있다. 샤프지수는 총위험을 기준으로 자본시장선(CML)을 이용하여 평가하는 것이며, 트레이너지수와 젠센지수는 체계적 위험을 기준으로 증권시장선(SML)을 이용하여 평가하는 것이다. 또 평가지수는 비체계적 위험에 대한 초과수익의 정도를 기준으로 평가하는 것이다.

[예 제] 다음은 12개월간에 걸쳐 자금운용자 갑과 병이 운용한 포트폴리오와 시장포트폴리오의 운용성과를, 무위험자산수익률을 차감한 초과수익률 ($\overline{R_p} - \overline{R_f}$)로 표시한 것이다. 위험이 조정된 성과척도를 이용하여 운용성과를 평가하라.

월	갑의 포트폴리오	병의 포트폴리오	시장포트폴리오
1	11.13%	37.09%	14.41%
2	8.78	12.88	7.71
3	9.38	39.08	14.36
4	−3.66	−8.84	−6.15
5	5.56	0.83	2.74
6	3.58	2.81	2.20
7	−4.91	−1.15	−8.41
8	6.51	2.53	3.27
9	0.78	−1.77	1.41
10	−4.01	−5.68	−3.13
11	7.76	12.09	6.49
12	−7.72	0.85	−15.27
연간 평균초과수익률	2.76	7.56	1.63
표준편차 σ_p	6.17	14.89	8.48
베타 β_p	0.69	1.40	1.00
잔차분산 $\sigma^2_p(\varepsilon)$	$(1.95)^2$	$(8.98)^2$	0.00
알파(α_p)	1.63	3.00	0.00
R^2	0.91	0.64	1.00

(1) 샤프지수(Sharpe's measure)

샤프(W. F. Sharpe)는 자본시장선의 사후적 기울기를 이용하여 포트폴리오 운용성과를 평가하는 방법을 제시하고 있다.

$$\overline{R_P} = \overline{R_f} + \frac{(\overline{R_m} - \overline{R_f})}{\sigma_m} \cdot \sigma_P \tag{7-4}$$

단, $\overline{R_P}$: 포트폴리오 P의 수익률

$\overline{R_m}$: 시장포트폴리오의 실현수익률

$\overline{R_f}$: 무위험이자율의 평균

$$\text{샤프지수}(RVAR) = \frac{\overline{R_P} - \overline{R_f}}{\sigma_P} \qquad (7\text{-}5)$$

앞의 예제의 자료를 샤프지수로 평가하면 다음과 같다.

갑 : 2.76/6.17 = 0.45

병 : 7.56/14.89 =0.51

시장 : 1.63/8.48 = 0.19

갑과 병 모두 기준 포트폴리오(시장 포트폴리오)의 운용성과보다도 양호하지만 병이 갑보다도 총위험 한 단위당 초과수익률을 얻는 정도가 많다.

(2) 트레이너지수(Treynor's measure)

트레이너(J. Treynor)는 위험의 측정치로서 샤프가 이용한 표준편차가 아닌 베타계수를 이용하여 성과를 측정하는 지수를 제시하고 있다. 충분히 분산투자된 포트폴리오의 경우 비체계적 위험은 대부분 제거되므로, 가격결정에 있어 의미있는 것은 체계적 위험이기 때문에 포트폴리오의 성과를 측정하는 데 있어서도 총위험보다는 체계적 위험을 적용하는 것이 보다 타당하다. 그래서 트레이너는 체계적 위험을 기준으로 운용성과를 평가하는 방법을 제시하고 있다.

$$\overline{R_P} = \overline{R_f} + \beta_P \cdot [\overline{R_m} - \overline{R_f}] \qquad (7\text{-}6)$$

단, $\overline{R_P}$: 증권 또는 포트폴리오 P의 실현수익률

$\overline{R_m}$: 시장포트폴리오의 실현수익률

$\overline{R_f}$: 무위험이자율의 평균

β_P : 증권 또는 포트폴리오 P의 베타계수

$$\text{트레이너지수}(RVAR) = \frac{\overline{R_P} - \overline{R_f}}{\beta_P} \tag{7-7}$$

한편 앞의 예제의 자료를 트레이너지수로 평가하면 다음과 같다.

갑 : 2.76/0.69 = 4.00

병 : 7.56/1.40 = 5.4

시장 : 1.63/1.00 = 1.63

체계적 위험에 바탕을 둔 트레이너지수로 운용성과를 평가할 때도 샤프지수와 같이 병의 운용성과가 갑보다 양호하다.

(3) 젠센지수(Jensen's measure)

젠센(M. Jensen)도 트레이너처럼 증권시장선을 이용한 포트폴리오 평가척도를 제시하였다. 그는 임의의 체계적 위험수준이 주어졌을 경우 증권시장선을 이용하여 예측한 수익률과 실제의 실현수익률의 차이로서 포트폴리오의 성과를 측정하고 있다. 식(7-8)과 같이 실제로 실현된 초과수익률과 포트폴리오 베타 즉, 체계적 위험에 기초하여 기대수익률과의 차이를 알파(α_P) 또는 젠센지수라고 부른다.

$$\alpha_P = \overline{R_P} - [\overline{R_f} + \beta_P(\overline{R_m} - \overline{R_f})] = [\overline{R_P} - \overline{R_f}] - \beta_P[\overline{R_m} - \overline{R_f}] \tag{7-8}$$

단, α_P : 젠센지수(알파)

$\overline{R_P}$: 포트폴리오 P의 실현수익률

앞의 예제에서의 자료에 대하여 젠센지수로 운용성과를 평가하면 다음에서 보는 것처럼 병이 갑보다 양호하게 나타난다.

갑 : 2.76 − (1.63) · 0.69 = 1.63
병 : 7.56 − (1.63) · 1.40 = 5.28

(4) 평가비율(appraisal ratio)

트레이너-블랙 모형에서 설명한 것처럼 초과수익의 가능성이 높은 소수의 증권들에 집중투자하게 되면 분산투자가 잘 이루어지지 않은 탓으로 투자위험(비체계적 위험)이 높게 되므로 양자간에 균형을 이룰 필요가 있다. 즉, 초과수익의 증가와 비체계적 분산가능위험의 감소 사이에 적절한 균형을 이루어야 운용성과가 양호하게 된다. 평가비율은 초과수익률 α_P를 비체계적 위험의 측정치인 잔차의 표준편차 $\sigma(\varepsilon_P)$로 나눈 비율인데, 이 비율이 높을수록 비체계적 위험을 감수하는 것에 대한 대가로 얻는 초과수익의 정도가 높음을 의미하게 된다. 환언하면 상반되는 양자간에 균형이 이루어지는 정도가 양호함을 뜻한다.

$$\text{평가비율} = \frac{\alpha_P}{\sigma(\varepsilon_P)} \tag{7-9}$$

이 평가비율은 무위험자산과 소수의 주식으로 구성된 포트폴리오에 분산투자하고 있는 경우의 운용성과 측정에 적절하다. 앞의 예제에 평가비율을 적용하여 보면 갑이 병보다 양호하게 나타나고 있다. 병이 분산투자가 덜 된 대신에 얻는 초과수익의 정도가 갑보다도 불량함을 암시한다.

갑 : 1.63/1.95 = 0.84
병 : 3.00/8.98 = 0.33

(5) 평가척도의 선택

이상의 설명에서 본 것처럼 똑같은 성과가 성과척도에 따라 그 서열이 달라질 수 있다. 그렇다면 어떠한 성과척도를 이용할 것인가? 그것은 평가목적에 어느 위험척도가 타당한지 그리고 포트폴리오평가의 목적이 무엇인지에 따라 결정할 수 밖에 없다. 앞에서 지적한 것처럼 운용자산전부가 위험자산으로 구성되어 있을 때는 샤프지수가 성과평가에 적절하고, 무위험자산과 위험자산으로 혼합되어 있으면 평가비율이 적절한 면이 있다. 많은 포트폴리오 중에서 어느 하나의 특정 포트폴리오의 성과를 평가할 때는 트레이너지수나 젠센지수가 유용한 면이 있는데 트레이너지수는 상대적 비율로서, 젠센지수는 절대적 차이로서 평가하는 차이가 있다. 하우겐(R. Haugen)도 비슷한 관점에서 여러 지수들의 우열에 관하여 다음과 같은 주장을 하고 있다. 그에 의하면 포트폴리오관리자의 성과는 관리의 “깊이(depth)”와 “폭(breadth)”의 견지에서 평가하여야 하는데 이때 “깊이”는 획득할 수 있는 초과수익의 크기를 말하고, “폭”은 초과수익을 획득할 수 있는 증권의 수를 의미한다. 그런데 트레이너지수와 젠센지수는 “깊이”만 설명하고 있으나 샤프지수는 “깊이”와 “폭” 모두에 민감하기 때문에 포트폴리오 성과평가에 보다 적절한 척도라는 것이다.

제7장 연습문제

1. (주) 수산은 매년 12월 31일 ₩400의 배당금을 계속적으로 지급하고 있다. 이 회사의 주식을 2년전 1월 1일에 한 주에 ₩10,000씩 10주를 매입하였다. 1년이 경과한 작년 1월 1일에 한 주에 ₩11,000씩에 2년이 지난 현재시점에서 나머지 5주를 ₩9,500에 매각하였다. 2년에 걸친 이 투자에 대하여 시간가중평균수익률과 금액가중평균수익률을 구하고, 어느 수익률이 더 합리적인지를 설명하라.

2. 다음 지난 1년간에 걸친 자금운용자 갑의 운영실적자료와 시장지수 관련자료이다(무위험자산수익률 : 6%).

	평균투자수익률	베타	표준편차	비체계적 위험 $\sigma(\varepsilon)$
甲 포트폴리오	35%	1.20	42%	18%
시장지수	28%	1.00	30%	0%

갑 포트폴리오와 시장지수에 대하여 샤프지수, 트레이너지수, 젠센지수, 평가비율을 구하고 어느 평가척도에 의한 것이 자금운용자 갑의 성과가 시장지수보다도 우월한가?

[해 답]

1. • 시간가중평균수익률 = 산술평균수익률

- 기간별투자수익률

$$1\text{년차 : } \quad 0r1 = \frac{\text{배당}(4,000)+\text{시세차익}(5,000)}{100,000} = 9\%$$

$$2\text{년차 : } \quad \frac{\text{배당}(2,000)+\text{시세차익}(-7,500)}{5\text{주}\times 11,000} = -10\%$$

- 시간가중평균수익률 = $\frac{1}{2}(9\% - 10\%) = -0.5\%$

• 금액가중평균수익률=내부수익률(IRR)

$$100,000 = \frac{4,000 + 55,000}{(1+r)} + \frac{2,000 + 47,500}{(1+r)^2}$$

$\therefore \ r \fallingdotseq 5.8\%$

• 기간별로 투자금액이 상이하게 나타나는 경우이므로 후자의 계산이 합리적이다.

2. • 샤프지수 = $(\overline{R_p} - \overline{R_f})/\sigma_p$

갑 : (35-6)/42 = 0.69

시장 : (28-6)/30 = 0.733

• 트레이너지수 = $(\overline{R_p} - \overline{R_f})/\beta$

갑 : (35-6)/1.2 = 24.2

시장 : (28-6)/1.0 = 22.0

• 젠센지수 = $(\overline{R_p} - \overline{R_f}) - \beta_p(\overline{R_m} - \overline{R_f})$

갑 : (35-6) -(1.2)(28-6) = 2.6

시장 : (28-6) - (1)(28-6) = 0

• 평가비율 = 젠센지수 / $\sigma(\varepsilon_p)$

갑 : 2.6/18 = 0.144

시장 : 0 G